

Randall-Sundrum 2-es típusú bránelméletek és tachion sötét energia modell

Doktori (PhD) értekezés

Keresztes Zoltán

Témavezető: Dr. Gergely Árpád László

**Fizika doktori iskola
Szegedi Tudományegyetem
Kísérleti Fizikai Tanszék
*Elméleti Fizikai Tanszék***

**SZTE TTIK
Szeged
2010**

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
1.1. Megfigyelések, a standard kozmológiai modell és az infláció	3
1.2. Sötét energia jelöltek	11
1.2.1. Kvintesszencia	11
1.2.2. Tachion mező	13
1.2.3. Fantomok	14
1.2.4. Chaplygin gáz	14
1.2.5. A sötét energia paraméterezéssel rekonstrukciója	16
1.3. Bevezetés a Tachion kozmológiai modellbe	16
1.4. Kozmológiai szingularitások	24
1.5. Alternatív gravitációs modellek	26
1.6. Bevezetés az RS2 brán-világ modellekbe	28
2. Randall-Sundrum 2-es típusú brán-világok	32
2.1. A 3+1+1 gravitációs dinamika	32
2.1.1. A téridő 3+1+1 felbontása	34
2.1.2. Kinematikai mennyiségek	35
2.1.3. Gravito-elektro-mágneses mennyiségek	36
2.1.4. Az energia-impulzus tenzor felbontása	36
2.1.5. A Gauss egyenlet és kontrakciói	37
2.1.6. 3+1+1 kovariáns dinamika és kényszerek	38
2.1.7. 3+1 gravitációs dinamika a bránon	45
2.1.8. Kozmológia	55
2.1.9. Konklúzió	56
2.2. Lokálisan forgás-szimmetrikus, stacionér vákuum brán téridők	57
2.2.1. Az e^a vektormezőhöz tartozó független kinematikai mennyiségek	57
2.2.2. I-es osztályú LFSZ típusú feltételek	59
2.2.3. Árapály töltésű Taub-NUT-(A)dS megoldás	60
2.2.4. Megfeleltetés a töltött Taub-NUT-(A)dS téridővel	62
2.3. 5d Birkhoff-tétel kiterjesztése	63
2.3.1. Fekete lyuk horizontok a Friedmann brán határral rendelkező 5d kozmológiai vákuum téridőkben	64
2.3.2. Kapcsolat a GM és a horizont téridők között	67
2.3.3. Diskusszió	69
2.3.4. Konklúzió	70
2.4. Zárt Friedmann bránok evolúciója sugárzó 5d fekete lyuk jelenlétében	70
2.4.1. Brán-világok evolúciója párolgás mentes 5d fekete lyuk esetén	75
2.4.2. A Hawking sugárzás	76
2.4.3. Nem átlátszó brán-világok evolúciója Hawking sugárzás jelenlétében	77
2.4.4. A részben áteresztő brán kozmológiai evolúciója	80
2.4.5. Konklúzió	81

2.5.	Az általánosított RS2 brán modellek luminozítás-vöröseltolódás relációja és kozmológiai tesztje Weyl folyadék jelenlétében	83
2.5.1.	A luminozítás-vöröseltolódás reláció RS2 brán-világokban	83
2.5.2.	A szupernóva adatokkal elvégzett tesztelés eredménye	90
3.	Tachion, mint sötét energia jelölt	91
3.1.	Tesztelés szupernóva adatokkal és a Big Brake	91
3.1.1.	A tachion kozmológiai modell Ia típusú szupernóva megfigyelési adatokkal való tesztelése	91
3.1.2.	Jövő kozmológiai evolúció	96
3.2.	Tachion mező viselkedése a távoli múltban, illetve a Big Brake után	97
3.2.1.	Az energiasűrűség, a nyomás és a barotropikus index evolúciója	97
3.2.2.	Túl a Big Brake-en	99
3.3.	Konklúzió	101
4.	Összefoglalás	103
A.	A luminozítás-vöröseltolódás reláció	126
B.	3+1+1 gravitációs dinamika mellékletei	129
B.1.	Kommutációs relációk	129
B.2.	Infinitézimális bázis transzformációk	130
B.3.	Gravitációs evolúciós és kényszer egyenletek egy aszimmetrikusa beágyazott brán mentén	133
B.4.	Kinematikai, gravito-electro-mágneses és anyagi változók Bianchi I brán-világra	135
C.	Általános relativisztikus analógia: a Bertotti-Robinson metrika, mint az extrémális Reissner-Nordström téridő horizont régiója	137
D.	Az általánosított RS2 brán modellek szupernóva adatokkal való tesztje Weyl folyadék jelenlétében	139
D.1.	A modellek szelektált szupernóva adatokkal való összevetése	139
D.2.	A Gold2006 szupernóva adatok	141
D.3.	Az LWRS modell kompatibilitása $\Omega_d = 0.04$ és $\alpha = 0$ paraméterekre a kozmológiai evolúcióval	142
D.4.	Az LWRS modell összevetése a szupernóva adatokkal $\alpha = 2, 3$ esetén	144

Előszó

Einstein dolgozta ki az univerzum önkonzisztens vizsgálatára alkalmas elméletet, az általános relativitáselméletet. Hubble megfigyelésének köszönhetően, még az ő korában változott meg az az elképzelés az univerzumból, hogy nem állandósult állapotban van, hanem folyamatosan változik, tágul. A tágulást lassulónak hitték. Mára már sokkal több megfigyelés áll rendelkezésre a világegyeterről, és új kérdések láttak napvilágot. Az elmúlt évtizedben a kozmológia központi témájává vált az úgynevezett sötét anyag és sötét energia mibenlétének tisztázása. A galaxis-halmazok mozgásának tanulmányozásából már régóta ismeretes, ahhoz hogy az általános relativitáselmélet kompatibilis legyen a megfigyelésekkel, valamilyen nagy mennyiségben jelenlévő nem világító anyag jelenléte szükséges. Azonban csak a múlt évtizedben az Ia típusú szupernóvák megfigyelésével vált világossá, hogy jelenleg egy másik, az erős energia-feltételt sértő anyagfajtának kell dominálnia. Az erős energia-feltételt sértő anyagfajták képesek az univerzum gyorsuló tágulását okozni.

Eddig nem sikerült megfigyelni sem a sötét anyagot, sem a sötét energiához köthető anyagot. Csak a kozmikus tágulásra, a struktúráképződésben, és a galaxisok dinamikájában szerepet játszó gravitációs hatásuk ismert. Ezért e két anyagtípusra létezik egy a fentiektől eltérő alternatív elképzelés is. E szerint nem, vagy nem csupán ismeretlen anyagok gravitációs hatását látjuk a megfigyelésekben, hanem maga a gravitációs dinamika tér el az általános relativitáselméletitől. A húr / M elmélet, ami az egyesített elmélet egy lehetséges jelöltje, több alternatív gravitációs modellt is motivált. Közülük az egyik a Randall-Sundrum II-es típusú brán modell.

A dolgozat két téma köré épül:

- a magasabb dimenziós modellek közül az általánosított Randall-Sundrum II-es (RS2) típusú brán-világ modell;
- és egy olyan kozmológiai modell tanulmányozása, amelyben a sötét energiát tachion mező biztosítja [1].

A dolgozat 1. fejezete a bevezetést tartalmazza. Itt áttekintem a kozmológiai szempontból fontosabb megfigyeléseket. Bemutatom a legegyszerűbb kozmológiai modellt (Λ CDM), amely összhangban van a megfigyelésekkel, ha ismeretlen anyagok jelenlétét feltételezzük. Az 1.2. fejezetben a sötét energia jelölteket veszem számba. Utána részletezem az általam vizsgált tachion kozmológiai modellt (1.3. fejezet). Az 1.4. fejezet tartalmazza a kozmológiai szingularitások rövid összefoglalóját. Az alternatív gravitációs modelleket az 1.5. fejezetben tekintem át. Közülük a dolgozatban vizsgált RS2-típusú brán-világ modellt az 1.6. fejezetben részletezem.

A 3.2.2. alfejezet kivételével az új eredményeket a 2.-3. fejezetek tartalmazzák.

A dolgozat az alábbi RS2 brán-világ modellre támaszkodó kutatásokat mutatja be (2. fejezet):

- Kidolgozok egy a magasabb dimenziós gravitációs dinamika leírására alkalmas formalizmust, ami a téridő $3+1+1$ alakú felbontásához illeszkedik (2.1. fejezet). Ez általánosítása az általános relativitáselméletben kidolgozott, kinematikai és gravito-elektro-mágneses mennyiségeket használó $3+1$ kovariáns formalizmusnak [2], illetve az RS2 modellekre általánosított brán $3+1$ kovariáns formalizmusnak [3]. Figyelembe veszem a lehetséges

örvényeket, így a formalizmus általánosításaként tekinthető a kanonikus változókat használó $s+1+1$ leírásnak [4], [5] $s = 3$ -ra. A $3+1+1$ formalizmus egyenleteinek egy alcsoportjából megkonstruálhatók olyan egyenletek, melyek leírják a gravitációs dinamikát a bránon. Ezek általában nem zártak. A 2.1.7. alfejezetben tárgyalok a brán egyenletekre egy a korábban ismertnél általánosabb záródási feltételt;

- A kidolgozott formalizmus felhasználásával a 2.2. fejezetben stacionér, lokálisan forgásszimmetrikus új brán megoldást vezetek le. A megoldás tartalmaz egy árapály töltés paramétert, ami a magasabb dimenziós gravitációs hatások miatt jelenik meg. A paraméter negatív értéke erősíti a gravitációt a bránon. Pozitív értékeire pedig az általános relativitáselméletben ismert töltött Taub-NUT-(A)dS téridőnek feleltethető meg;
- A Friedmann brán szimmetriáival és negatív kozmológiai állandóval rendelkező 5-dimenziós (5d) téridők osztályát [6]-ban adták meg (ez 5d Birkhoff-tételként ismert). A tételt sérti a [7]-ben talált metrika, amely rendelkezik a fenti szimmetriákkal, azonban [6] bizonyítása rá nem alkalmazható. A [7] cikkben megfogalmaztak egy olyan sejtést, ami az 5d Birkhoff-tétel kiterjesztheségét kínálja. A 2.3. fejezetben bizonyítom ezt a sejtést azáltal, hogy megmutatom [7] metrikája a tételben szereplő extrémális téridő degenerált horizont téridejét írja le. Pozitív 5d kozmológiai állandó esetén pedig [7] metrikája szintén egy fekete lyuk megoldás degenerált horizontját adja.
- Megvizsgálom az aszimmetrikusan beágyazott zárt Friedmann brán kozmológiai evolúcióját párolgó 5d fekete lyuk jelenlétében (2.4. fejezet). A fekete lyuk sugárzásának figyelembe vétele csak perturbatíván hat a brán fejlődésére. Ez annak köszönhető, hogy két egymással ellentétes hatás lép fel. A sugárzás azon része, amit a brán elnyel erősíti a brán öngravitációját. Másrészt a sugárzásnak a bránra kifejtett nyomása a gyorsuló kozmikus tágulást segít elő. Létezik olyan transzmisszió függő kritikus kezdeti brán energiasűrűség, amikor a Hawking sugárzás miatt fellépő két egymással versenyző hatás közel kioltja egymást. Növekvő transzmisszió esetén csökken a kritikus brán energiasűrűség és romlik a kritikus viselkedés. A félig áteresztő bránok rekollapszusa gyorsabb magas transzmisszió esetén;
- Néhány brán-világ modellre származtatom a luminozítás-vöröseltolódás reláció analitikus kifejezését (2.5. fejezet). A relációt $SAdS_5$, illetve 5d Vaidya-Anti-de Sitter téridőbe ($VAdS_5$) szimmetrikusan ágyazott sík Friedmann bránokra írom fel. A modelleket teszteljük az Ia típusú szupernóva (SNIa) adatokkal. $VAdS_5$ -be történő beágyazás esetén a modellek jó egyezést mutatnak a szupernóva adatokkal, és nem sértik a brán-feszültségre ismert korlátokat sem. Ezekben a modellekben a brán és a külső 5d régiókban található fekete lyukak között energia kicserélődés megy végbe oly módon, hogy a brán sugárzik.

A 2.5. fejezetben azt vizsgálom, hogy az Ia típusú szupernóva megfigyelésekből származó távolságmodulus adatok támogatják-e azt a kozmológiai modellt, amelyben a sötét energiát tachion mező biztosítja [1]. A megfigyeléseket legjobban kielégítő kezdeti feltételekkel numerikusan fejleszttem a modell egyenleteit, és megvizsgálom a jövő evolúciót. Azt találom, hogy a szupernóva adatok támogatnak olyan lehetséges időfejlődést is, amely az úgynevezett Big Brake (Nagy Megtorpanás) szingularitásba tart. Tárgyalom, hogy a Big Brake szingularitás elérése az univerzumnak nem végállapota.

Az utolsó fejezet az összefoglalást tartalmazza.

1. fejezet

Bevezetés

1.1. Megfigyelések, a standard kozmológiai modell és az infláció

Az univerzum talán legfontosabb tulajdonsága a nagy skálájú homogenitása és izotrópiája, amiket kozmológiai szimmetriáknak nevezünk. Ezek a tulajdonságok biztosítják, hogy azon megfigyelésekből, melyeket a Földről, illetve Földközlelől végzünk, következtetéseket vonhassunk le az univerzum egészére. Korábban az univerzum homogenitása és izotrópiája feltevések voltak, amit *kozmológiai elv*nek neveztek. Ha az univerzumban nem vagyunk speciális helyen, vagy valamilyen ponttól speciális irányban, akkor ez a feltevés ésszerű. A kozmológiai elv kísérleti alátámasztása csak a XX. század végén sikerült a néhány ezer [8], több százezer [9] és 100 millió (ezek közül 1 milliónak a vöröseltolódását is meghatározták) [10] galaxist tartalmazó égtérképek elkészítésével. A megfigyelések azt mutatják, hogy 300Mpc-es skálán mindenféle struktúra eltűnik. Az égbolt térképek elkészítésével meghatározható az univerzum anyageloszlását jellemző teljesítmény-spektrum. A kozmológiai modellekből ez szintén számolható.

A nagy léptékű kozmológiai szimmetriákat közvetetten a megfigyelt Hubble tágulási törvény is alátámasztja, hiszen belátható, hogy ez az egyetlen tágulási törvény, ami összhangban áll velük. A kimért tágulási törvény ugyanakkor azt is mutatja, hogy korábban az univerzumnak kisebbnek kellett lennie.

Homogén és izotróp téridő fölíázható 3-dimenziós (3d) térszerű felületekkel. Megmutatható, hogy a 3d hiperfelületek konstans görbületű terek, amik vagy gömbfelületek, vagy euklideszi terek, vagy hiperboloidok [11]. A τ paramétert sajátidőnek választva (*kozmológiai idő*) a homogén és izotróp téridő geometriáját a Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) metrika adja [11]:

$$ds_{FLRW}^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]. \quad (1.1)$$

Itt (r, θ, φ) együttmozgó koordináták, a a skálafaktor és $k = 0, \pm 1$ a görbületi index. A *fizikai radiális távolságot* ar adja. Hasznos alternatív formája a FLRW metrikának

$$ds_{FLRW}^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau) [d\chi^2 + r^2(\chi; k) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] , \quad (1.2)$$

ahol

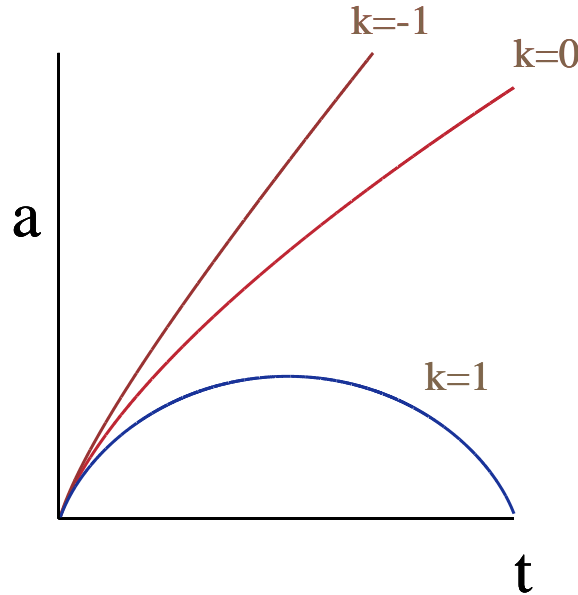
$$r = r(\chi; k) = \begin{cases} \sin \chi & , & k = 1 , \\ \chi & , & k = 0 , \\ \sinh \chi & , & k = -1 . \end{cases} \quad (1.3)$$

Itt χ egy másik együttmozgó radiális koordináta.

Az Einstein egyenleten keresztül kapjuk, hogy a T_{ab} energia-impulzus tenzor az alábbi alakú

$$T_{ab} = \rho u_a u_b + p h_{ab}, \quad (1.4)$$

ahol h_{ab} a 3d térszerű hiperfelület metrikája. Itt T_{ab} egy ρ energiasűrűségű és p nyomású ideális folyadék energia-impulzus tenzora. Az anyag nem sérti az erős energia-feltételt, ha $\rho + 3p > 0$ ($c = 1$ egységekben).¹ Ha az állapot-egyenlet $p = w\rho$, akkor ez $w > -1/3$ -ra teljesül. A w paramétert *barotropikus index*nek nevezzük. Két fontos esete $w = 0$ (por) és a $w = 1/3$ (sugárzás). Ezekben az esetekben a 1.1. ábra mutatja a skálafaktor lehetséges evolúcióját különböző k görbületi indexekre. Érdekes megfigyelni, hogy az univerzum lassulva tágul.



1.1. ábra. A skálafaktor evolúciója különböző k görbületi indexekre, amikor az univerzum anyagát leíró ideális folyadék barotropikus indexe 0. Ez a három típusú fejlődés figyelhető meg akkor is, amikor $w = 1/3$.

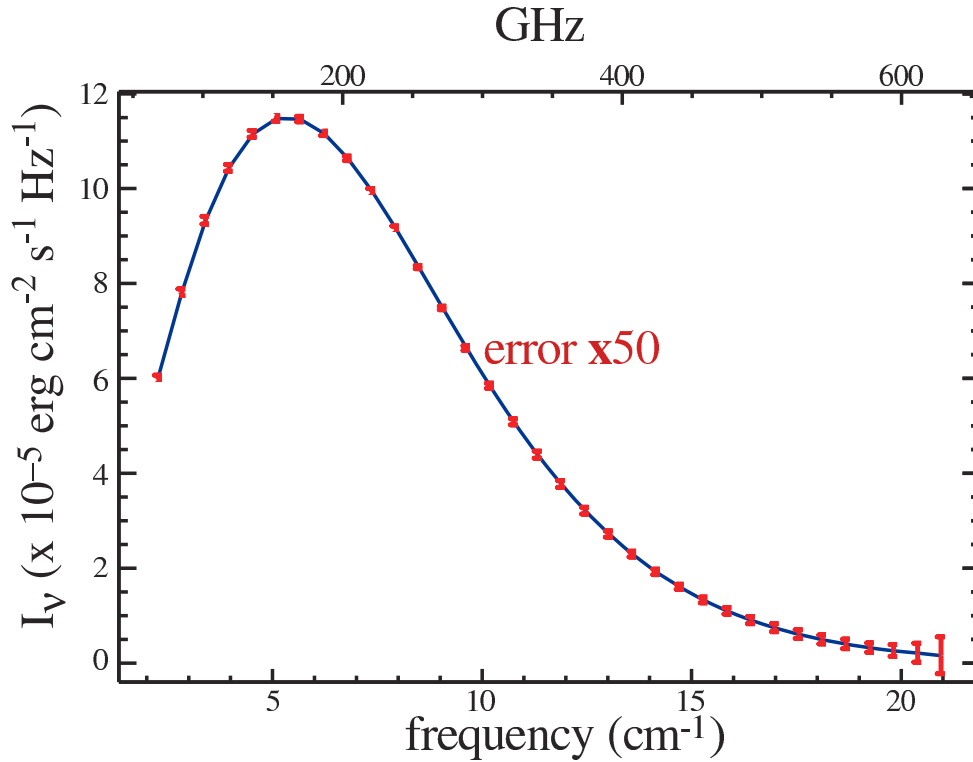
Már a XX. század első felében voltak arra utaló jelek, hogy az univerzum jelentős elektromágnesesen nem sugárzó *hideg sötét anyagot* (állapot-egyenlete: $p = 0$; cold dark matter; CDM) is tartalmaz. A Coma-halmaz galaxisainak tanulmányozásakor kiderült, hogy a galaxisok sebessége jóval nagyobb annál a szökési sebességnél, mint ami a halmaz világító anyag komponenseiből származtatható [12], [13]. A galaxisok röntgensugárzását megfigyelő ROSAT mesterséges hold mérései később kimutatták, hogy számos spirális galaxisban a csillagközi gáz $T \propto 10^7 - 10^8$ K hőmérsékletű sugárzást bocsájt ki. Ehhez azonban a sugárzást kibocsájtó atomok átlagos sebessége megint csak meg kell haladja a galaxis látható anyag tömegéből származtatható szökési sebességet [13].

Gömbszimmetrikus anyag eloszlást feltételezve a centrumtól r sugarú pályán mozgó részecske sebesség négyzete $v^2 = GM(r)/r$, ahol M az r sugáron belüli össztömeg és G a gravitációs konstans. A tömegsűrűséget állandónak tekintve a tömegeloszláson belül mozgó részecske sebessége lineárisan nő a sugárral. Az anyag eloszláson kívül azonban sebessége négyzetgyökösen csökken.

A spirál galaxisok karjaiból származó H atomok hiperfinom (21cm-es) sugárzása ellenben azt mutatta, hogy az atomok sebessége állandósuló értéket vesz fel távol a látható anyag határától [13]. A megfigyelések magyarázhatók, ha feltesszük, hogy a látható anyagot körülveszi egy

¹A dolgozat nagy részében $c = 1$ egységekben dolgozok, néhol azonban feltüntettem a c hatványokat. Ez félreértésekhez nem vezet, hiszen dimenzió analízisből mindig kiderül, hogy hol milyen c hatványok kerültek elhagyásra.

gömbi eloszlású sötét anyag halo, aminek tömegvonzása határozza meg dominánsan a látható anyag határán túl a részecske mozgását.



1.2. ábra. A FIRAS mérte háttérsugárzás spektrum. Ez egy tökéletes $T = 2.725 \pm 0.002\text{K}$ hőmérsékletű feketetest-sugárzás [14].

A sötét anyagról tudjuk, hogy *(i)* igen stabil, mert napjainkra nem bomlott el, *(ii)* az elektromágneses sugárzással csak gyengén hathat kölcsön, hiszen “sötét”, *(iii)* sűrűsége, mint később látni fogjuk, $\Omega_{dm} \approx 0.228$. A neutrínók teljesítik az első két feltételt, azonban a lecsatolódás körüli termikus adatokból meghatározott számsűrűségükből, és figyelembe véve a tömegükre ismert korlátokat következik, hogy a sötét anyag sűrűségének mintegy ezredét képesek csak kitenni [13]. A sötét anyag lehetséges jelöltjei a szuperszimmetrikus térelméletben megjelenő gyengén kölcsönható nagy tömegű részecskék (WIMP-ek).

Az ősrobbanás elmélete szerint az univerzum korábban sokkal kisebb volt, és fotonok által szorosan csatolt protonokból, illetve elektronokból álló plazma töltötte ki. Ebben a plazmában hullámszerű gerjesztések voltak a fotonoknak a töltött részecskéken való intenzív szóródása miatt. A protonok és elektronok eloszlása nem volt egyenletes, amit követett a fotonok sűrűségeloszlása is a csatolásnak köszönhetően.

Ebben az időszakban a protonok elektron befogása miatt pillanatnyilag kialakuló atomokat a fotonok rögtön ionizálták. A fotonok hőmérséklete fordítottan arányos az univerzum skálafaktorával. Ennek következtében a fotonok energiát veszítenek a tágulás során, így idővel már nem voltak képesek ionizálni a kialakuló atomokat (*rekombináció*).

A fotonok a szóródás hiánya miatt szabadon fejlődtek a továbbiakban (*lecsatolódás*).

Mivel a fotonok eloszlása a lecsatolódásig követte a nem relativisztikus anyagét, ezért hőmérsékletingadozásaik az akkori sűrűségeloszlást mutatják. A nagyobb sűrűségű részből származó fotonok hőmérséklete egyrészt nagyobb kell legyen a nagyobb energiasűrűség miatt, mint a ritkább helyről származóknak. Másrészt a nagyobb sűrűségű helyekről származóknak a nagyobb gravitációs potenciál gödöréből való kilépésnek köszönhetően a vöröseltolódásuk is nagyobb kell legyen. A két hatás közül az utóbbi a domináns, így a nagyobb sűrűségű helyről származó fotonok az átlagosnál kisebb hőmérsékletűek (*Sachs-Wolfe effektus*).

A nem relativisztikus anyagról lecsatolódtott fotonok alkotta sugárzást *kozmosz mikrohullámú háttérsugárzásnak* (*Cosmic Microwave Background; CMB*) nevezzük. A lineáris perturbációszámításban a gravitációs potenciál konstans, ha a görbületi index zérus (látni fogjuk, hogy a megfigyelések a $k = 0$ univerzumot tüntetik ki) és az univerzumot por tölti ki. A por komponens a barionikus és a hideg sötét anyag alkotja. A potenciál csökken, ha a kozmológiai állandó (állapot-egyenlete $p = -\rho$) dominál. A lecsatolódás időszakában és utána a fotonok által érzékelt gravitációs potenciálok változása megjelenik a hőmérsékleti spektrumban. A lecsatolódás korszakában a gravitációs potenciál azért változik, mert a sugárzás mennyisége még jelentős a porhoz képest (*korai integrális Sachs-Wolfe effektus*), későbbi korszakban pedig a kozmológiai állandó dominál (*késői integrális Sachs-Wolfe effektus*).

Amikor a sűrűségperturbációk nem-lineárisra válnak a gravitációs potenciál újból növekedni kezd még akkor is, ha $k = 0$ és a hideg sötét anyag dominál. Ennek hatását a CMB fluktuációkra *Rees-Sciama effektusnak* nevezzük.

Az univerzumban kialakult nem-lineáris struktúrák lencséző hatása szintén befolyásolja a spektrumot (*halmazok lencsézése*).

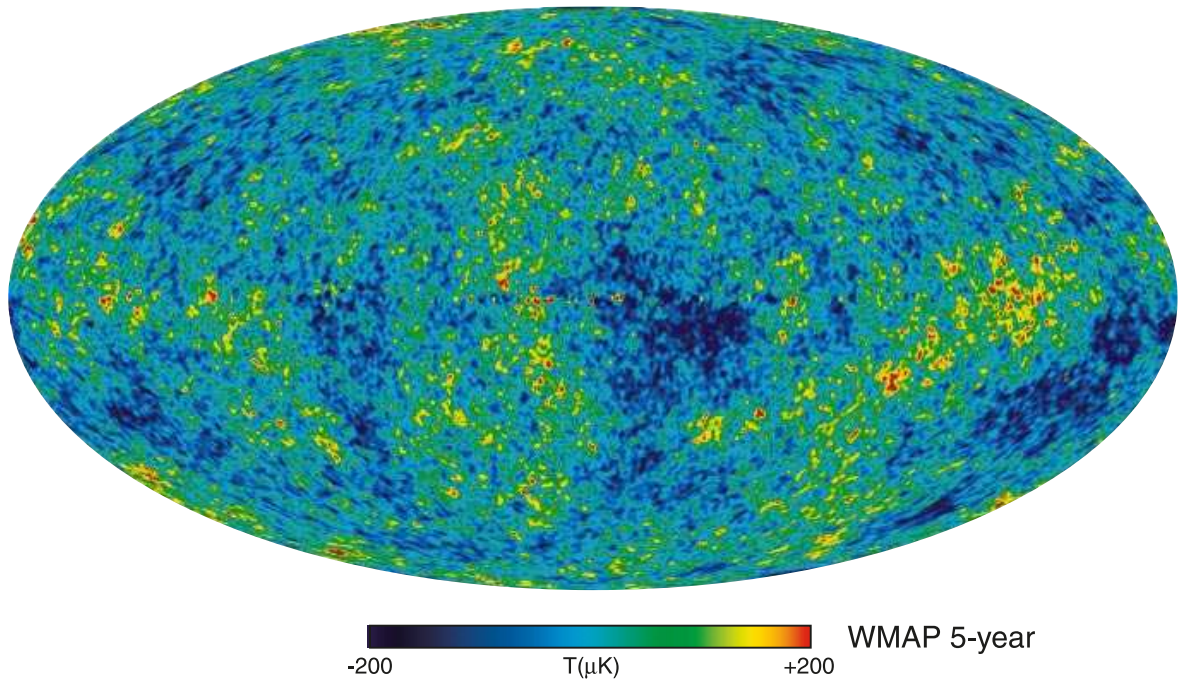
Az első csillagok kigyulladására ionizálja a csillagközi gázt (*reionizáció*). A fotonok így újból szóródhatnak a szabad elektronokon, ami információt mos ki az elsődleges hőmérsékleti fluktuációból.

A mérések alapján a háttérsugárzás majdnem tökéletes feketetest-sugárzás (1.2. ábra). A feketetest-sugárzástól azonban az úgynevezett *Szunyaev-Zeldovics effektus* eltérést okoz. Ugyanis a CMB spektrum torzul, amikor a háttérsugárzás fotonjai a galaxis-halmazokban lévő forró, intenzív röntgensugárzást kibocsátó gázba hatolnak. Itt a fotonok újból szóródnak a gáz szabad elektronjain, és energiát kapva tőlük megváltozik a hullámhosszuk, így a sugárzás hőmérséklete is (Szunyaev-Zeldovics effektus). Ennek köszönhetően a legnagyobb hőmérsékletingadozásokat a galaxis-halmazok irányában észleljük. A Szunyaev-Zeldovics effektusnak 3 típusát különböztetik meg:

- A feketetest-sugárzástól eltérést okozó hatások:
 - *termális Szunyaev-Zeldovics effektus*: ekkor az elektronok a magas hőmérséklet miatt rendelkeznek nagy energiával;
 - *nem termális Szunyaev-Zeldovics effektus*: ekkor az elektronok a nagy sebességük miatt rendelkeznek nagy energiával (relativisztikus elektronok);
- *kinematikai Szunyaev-Zeldovics effektus* akkor jelentkezik, amikor a szóró közeg mozgása eltér a Hubble áramláshoz képest. Ekkor a szóró gáz rendszerében a CMB anizotrópnak tűnik, amit a szórás izotrópizál. Ez utóbbi effektus nem okoz eltérést a feketetest-sugárzástól a CMB-ben, de a hőmérsékletet módosítja, és lehetőséget nyújt a halmaz pekuliáris mozgásának meghatározására.

A háttérsugárzás majdnem tökéletes feketetest-sugárzás jellege [15] mutatja, hogy az univerzum termikus egyensúlyban volt a sugárzás keletkezésekor. A WMAP által a közvetlenül mért mikrohullámú égtérkép tartalmaz egy domináns dipól tagot a CMB nyugalmi rendszeréhez képesti mozgása miatt, illetve tartalmazza a Tejútrendszer extra sugárzását. A dipól tag és a Tejútrendszer sugárzásának levonása után az 1.3. ábra mutatja a több frekvencián mért (23 GHz, 33 GHz, 41 GHz, 61GHz, 94GHz) adatokból összeállított égtérképet.

Az Ia típusú szupernóvák azonos tömegű (1.4 Naptömeg) fehér törpék felrobbanásából származnak, ezért jelentős hasonlóságokat mutatnak. A felvillanások erőssége azonban nem pontosan egyenlő. Az észlelt szupernóvák fényessége függhet attól is, hogy milyen környezetben robbantak fel, de az eltérést feltehetően inkább az okozza, hogy nem pontosan azonos tömegű és összetételű csillagokból jöttek létre. Jól megalapozott kalibrációs módszereket alkalmazva meg lehet határozni az objektum maximális luminozitását a robbanás referencia rendszerében. A meghatározás az emittált luminozitás időfüggő változásának analizálásával történik

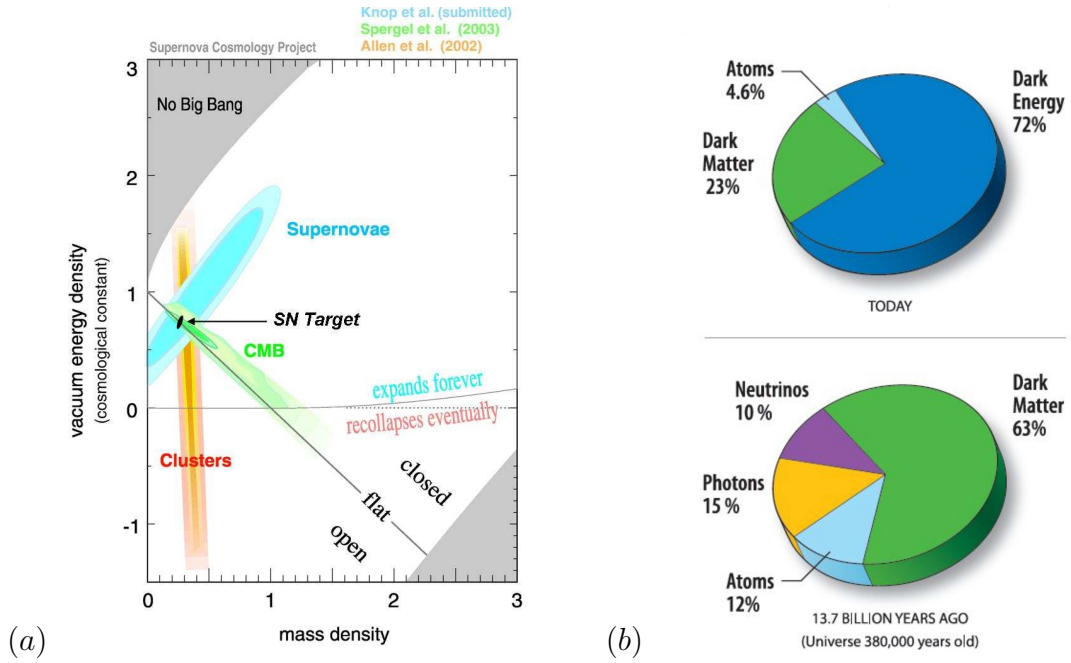


1.3. ábra. A háttérsugárzás WMAP 5 év adataiból összeállított égtérképe [16].

(Multi-Color Light Curve analízis) [17], [18]. Ebben az eljárásban a megfigyelt paramétereket, a *fénygörbe alakját* és az *emisszió spektrális eloszlását* kell az aktív galaxis maggal rendelkező galaxis referencia rendszerébe konvertálni. Távoli szupernóvákra a konvertálásban számba kell venni az idő-dilatációt és az úgynevezett K -korrekciót [19]. A K -korrekció azt veszi figyelembe, hogy távoli szupernóvákra, ahol a vöröseltolódás jelentős, a műszereink, melyek a látható fény tartományában érzékenyek, valójában a forrás referencia rendszerében az ultraibolya tartományban kibocsátott fényt mérik. Ezek a módszerek függenek z -től, de függetlenek a kozmológiai modelltől. Végrehajtva ezeket a korrekciókat egy jól kalibrált maximális luminozítás kapható az Ia típusú szupernóvákra, és ennek következményeként ezek a szupernóvák standard gyertyáknak tekinthetők. Emiatt a $d_L(z)$ luminozítás távolságuk meghatározható. A vöröseltolódás pedig az aktív galaxis maggal rendelkező galaxisok spektroszkópiai analíziséből kapható. Az A mellékletben részletesen bemutatom a luminozítás-vöröseltolódás reláció elméleti meghatározását, amit 3.1.1-ben és a D. mellékletben használni fogok.

A megfigyelések alapján a mért luminozítás távolság gyorsabban nő z -vel, mint abban az esetben, amikor az univerzumot kitöltő anyag típusokat az erős energia-feltételt teljesítő ideális folyadékokkal modellezzük nagy skálán. Emiatt az univerzumot kitöltő anyagfajták között lennie kell olyanoknak, ami sérti az erős energia-feltételt, és jelenleg dominál. Az 1.1. ábrán látható skálafaktor viselkedéshez vezető modellek nem tudják megmagyarázni az Ia típusú szupernóva megfigyeléseket.

A legegyszerűbb olyan modell, amely képes megmagyarázni az említett megfigyeléseket a Λ CDM modell. A Λ CDM modellben három különböző állapotegyenletű ideális folyadék komponens tölti ki az univerzumot. A $p = w\rho$ állapot-egyenletben a $w = 1/3$ -hoz tartozik a sugárzási komponens, a CMB fotonok. A $w = 0$ a por komponenseket: a barionikus és a sötét anyagot jellemzi; míg a $w = -1$ az erős energia-feltételt sértő kozmológiai állandót, ami a legegyszerűbb típusa a sötét energiának. A sugárzási komponensek energiasűrűsége a^{-4} -el, míg a por komponenseké a^{-3} -al arányos. Ezért az univerzum tágulása során, mégha valaha a sugárzási komponensek is domináltak, idővel mindenképp elhanyagolhatóvá válnak a por-komponensekhez képest. A CMB megfigyelések alapján az anyag, és a sugárzás egyenlősége $z \approx 3141$ -nél (z a vöröseltolódást jelöli) volt, megelőzve a foton lecsatolódást $z \approx 1091$ [20].



1.4. ábra. (a) ábra: Az univerzum fejlődése, illetve a szupernóva, a galaxis-halmazok és a CMB csúcsok tanulmányozásából származó kényszerek az $(\Omega_\Lambda = \text{“vacuum energy density”, } \Omega_\rho = \text{“mass density”})$ paramétersíkon [21]. (b) ábra: Az ismert anyag (“Atoms”), a sötét anyag (“Dark Matter”) és a sötét energia (“Dark Energy”) %-os aránya jelenleg (felső ábra), illetve korábban, amikor a sötét energia még elhanyagolható volt, de a fotonok (“Photons”) és a neutrínók (“Neutrinos”) számottevően hozzájárultak a teljes energiasűrűséghez (alsó ábra) [22].

Az univerzum késői fejlődési szakaszában a kozmológiai állandó veszi át a domináns anyag szerepét gyorsuló tágulást okozva. Ez képes megmagyarázni az Ia típusú szupernóva megfigyeléseket. Amikor a kozmológiai állandóhoz képest már minden más anyag energiasűrűsége elhanyagolható lesz (ez a de Sitter univerzum) az univerzum tágulása exponenciálissá válik.

Azt az energiasűrűséget, amelynél a görbületi index eltűnik, kritikus energiasűrűségnek nevezzük (lásd később az (1.72) Friedmann egyenletet):

$$\rho_c = \frac{3}{\kappa^2} H^2, \quad (1.5)$$

ahol κ^2 a gravitációs csatolási állandó, és $H = \dot{a}/a$ a Hubble paraméter. A Λ CDM modell a három anyag-típushoz köthetően három kozmológiai paraméterrel rendelkezik, amiket úgy vezetnek be, hogy képezik a kritikus energiasűrűséghez képesti arányuk jelenlegi értékét:

$$\Omega_r = \frac{\rho_{r0}}{\rho_{c0}} = \frac{\kappa^2 \rho_{r0}}{3H_0^2}, \quad \Omega_\rho = \frac{\rho_{\rho0}}{\rho_{c0}} = \frac{\kappa^2 \rho_{\rho0}}{3H_0^2}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\rho_{\Lambda0}}{\rho_{c0}} = \frac{\Lambda}{3H_0^2}. \quad (1.6)$$

Itt az r és ρ index a sugárzást, illetve a port jelenti, a 0 index a mennyiségek jelenlegi értékét, Λ pedig a kozmológiai állandó. Egy negyedik paraméter a görbületi konstanshoz tartozik:

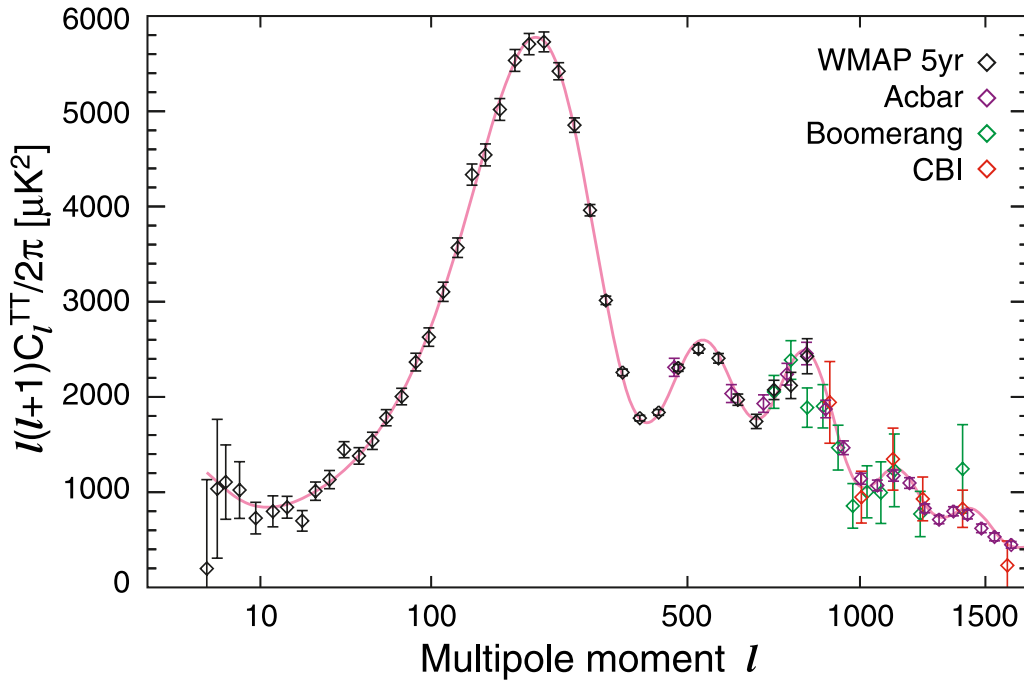
$$\Omega_k = \frac{-k}{H_0^2}.$$

A paraméterekre a Friedmann egyenletből kapható egy összefüggés:

$$1 - \Omega_k = \Omega_\Lambda + \Omega_r + \Omega_\rho, \quad (1.7)$$

így csak három független közülük. Mivel a sugárzási komponens energiasűrűsége jelenleg igen csekély, Ω_r elhanyagolható a többihez képest. Az 1.4a ábra mutatja az univerzum viselkedé-

sét különböző Ω_Λ és Ω_ρ paraméter párosokra. Az $\Omega_k = 0$ görbe választja el a zárt és nyílt univerzumokat. Az $\Omega_\Lambda = 0$ a határ az örökké táguló és a rekollapszáló univerzumok között (az $0 \leq \Omega_\rho \leq 1$ tartományban), amíg $\Omega_\Lambda = \Omega_\rho/2$ egyenes határolja a gyorsulva és a lassulva tágulás tartományait. Az 1.4. ábrán a "no Big Bang" jelöli azt a paramétertartományt, ahol a múltban a skálafaktor értéke sosem volt nulla. Itt a múlt felé haladva a skálafaktor csökken, majd az Ω_Λ és Ω_ρ -tól függően valahol újból átmegy növekedésbe. Az aközötti határvonal, hogy múltban a skálafaktor elérheti-e a nullát, vagy sem, egy harmadfokú egyenlet megoldására vezethető vissza, ami megadja az Ω_Λ és Ω_ρ kapcsolatot [23]. Hasonló igaz az örökké táguló és a rekollapszáló univerzumok közötti határvonalra az $\Omega_\rho > 1$ tartományban, amikor azt keressük, hogy a skálafaktor a jövőben elérheti-e a nullát. A skálafaktor nulla értéke speciális szingularitásoknak felel meg: *Ősrobbanás* (ha a múltban volt $a = 0$) és *Nagy Összeroppanás* "Big Crunch" (ha a jövőben lesz $a = 0$). A szingularitások különböző típusait az 1.4. fejezetben mutatom be.



1.5. ábra. A háttérsugárzás teljesítmény-spektruma a WMAP 5 év, ACBAR, Boomerang és CBI kísérletekből. A folytonos vonal a legjobban illeszkedő Λ CDM modell esetén számolt teljesítmény-spektrum [24].

Az 1.4a ábrán a szupernóva, a galaxis-halmazok és a CMB csúcsok tanulmányozásából származó kényszerek is fel vannak tüntetve. A CMB csúcsok helyzete és nagysága (1.5. ábra) rendkívül érzékeny a kozmológiai paraméterekre:

- a első csúcs helyzete nagyon pontosan a $k = 0$ -t jósolja, ami jól látszik az 1.4. ábrán;
- a első csúcs nagysága és a második csúcs létezése eredményezi, hogy a (i) teljes hideg anyag (por) sűrűség kisebb, mint ami ahhoz kell, hogy $k = 0$ legyen; (ii) hideg sötét anyag létezik, és az ő energiasűrűsége nagyobb, mint a barionikus anyagé [25].
- a csúcsok helyzetei és nagyságai együtt eredményezik, hogy sötét energia létezik.

A csúcsok helyzeteinek, és nagyságainak pontos ismerete megjósolja a sötét energia létezését, és számot ad Ω_Λ , Ω_{dm} (a dm index a hideg sötét anyagra utal), Ω_b (b a barionokat jelenti) és H_0 értékéről. Kombinált kényszerekből származó legjobb illeszkedést az $\Omega_k \approx 0$, $\Omega_\Lambda \approx 0.726$,

$\Omega_\rho \approx 0.274$ paraméterek adják [20]. A CMB ismerete azt is elárulja, hogy Ω_ρ -ból a bariónikus anyag csupán $\Omega_b = 0.0456$ [20], a többi a sötét anyag. Így az univerzum térmetszetei síkok, szingularitásból született és örökké tágul. Az 1.4b ábra mutatja az univerzum anyagának összetételét %-ban kifejezve.

Az univerzum legkorábbi időszakaitól eltekintve ismereteink szerint a Λ CDM modell helyesen írja le a kozmológiai evolúciót. Amikor az univerzum közel Planck skála méretű volt, az általános relativitáselmélet helyett kvantumgravitációs elmélet szükséges a kozmológia tanulmányozásához. Ezután azt várjuk, hogy az általános relativitáselmélet képes leírni az univerzum dinamikáját, de egy ideig még a Λ CDM modell biztosan nem.

A Λ CDM nem tudja megmagyarázni például azt, hogy:

- az univerzum $\tau = const$ metszetei miért annyira pontosan síkok (*síkság problémája*);
- miért látjuk a CMB fotonokat közel ugyanolyan hőmérsékletűnek (*horizont probléma*) bármerre is nézünk az égbolton;
- honnan származik a *kezdeti struktúra*.

Egyszerűen belátható hogy korai időszakban, ha k értéke valamikor kicsit is eltért volna a nullától, akkor később még inkább el kellett volna térnie, így a $k = 0$ univerzum instabil [26].

A horizont probléma a következőt jelenti. Azt tapasztaljuk, hogy bármerre nézünk is az égbolton a CMB sugárzás közel ugyanolyan hőmérsékletű. De például az ellenkező irányból jövő fotonok termalizálódása biztosan nem következhetett volna be, ha az univerzum mindig a Λ CDM modell szerint viselkedett volna [26].

Ha kezdetben volt némi inhomogenitás és anizotrópia, akkor a Λ CDM modell perturbatív tárgyalásában kiválóan elmagyarázhatók a látható nagy skálájú struktúrák létrejötte, de honnan származik a kezdeti perturbáció?

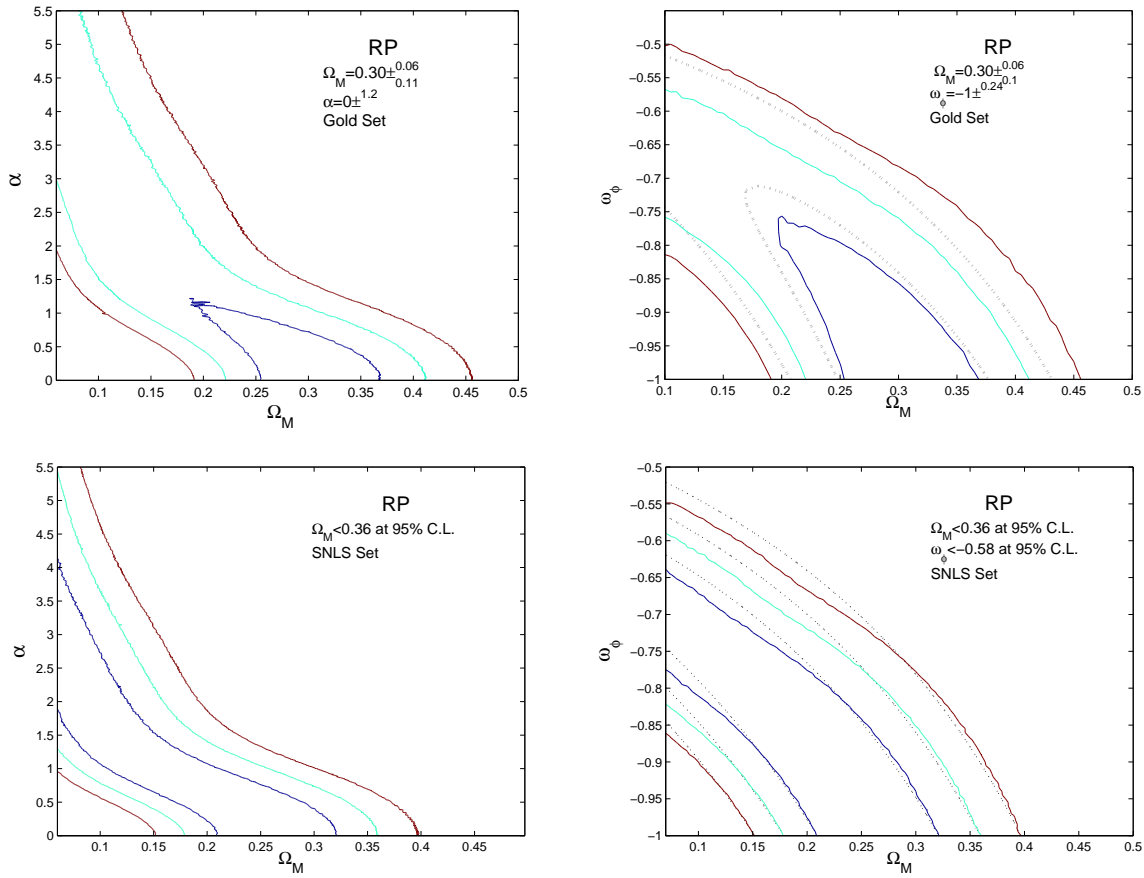
Ezeket a problémákat azonban fel lehet oldani azáltal, ha bevezetünk az univerzumnak egy korai gyorsulva táguló korszakát a Λ CDM modell érvényességének kezdete elé [26], [25]. A korai korszakban egy olyan anyagfajta dominálhatott, ami sérti az erős energia-feltételt, de idővel elbomlott. Egy ígéretes lehetőség erre a bizonyos skalármezőkhöz köthető inflatonok [13], [25], [26], amelyek kezdetben fénysebességnél gyorsabb tágulást okoznak. Az univerzum a hirtelen történő felfúvódása során "kisimul", így a görbületi paraméter a nullához tart. A rövid ideig tartó fénysebességnél gyorsabb tágulás a horizont problémát is megoldja, hiszen a megfigyelhető univerzum mérete alig, míg a teljes világegyetem a sokszorosára nőtt ebben az időszakban. Az infláció előtti horizont így jóval túlnő azon, ahonnan fény érkezhett hozzánk az infláció utáni korszakból. Ezért láthatjuk közel ugyanolyan hőmérsékletűnek a különböző irányból érkező CMB fotonokat. A nagyon távoli univerzum hőmérséklete még mindig lehet más. Az inflációs felfúvódás során a vákuum-fluktuációk okozta gravitációs potenciál perturbációk befagynak, miközben a fizikai skála mintegy 30 nagyságrenddel megnő. Ez kis inhomogenitást és anizotrópiát okoz, ami magyarázza, hogy honnan származik a kezdeti struktúra.

A sötét energia az anyag azon komponensét jelenti, amely biztosítja jelenleg az univerzum megfigyelt gyorsulva tágulását. A Λ CDM modellben ez a kozmológiai állandó. De valóban konstans az energiasűrűsége a sötét energiának? Kérdés interpretálható-e valamilyen módon ez a konstans energiasűrűségű sötét energia.

A kvantumtérelmélet kínál egy lehetőséget, a kozmológiai konstans vákuum-energiaként való interpretációját. Azonban az elméletből számolható vákuum-energia 121 nagyságrenddel nagyobb, mint ami a megfigyelt kozmológiai állandóhoz tartozna. Az elmélet szuperszimmetrikus kiterjesztésében a vákuum-energia nulla. A szuperszimmetria sértése pedig megintcsak sok nagyságrenddel nagyobb vákuum-energiát eredményez, mint ami a megfigyelésekkel összeférne [27].

Az energia-impulzus tenzorba olyan folyadék komponens bevezetése, aminek energiasűrűsége nem változik az univerzum tágulásával nem túl természetes. Másfelől megengedve a sötét

energia energiasűrűségének időbeli változását a szupernóva adatokkal jobban egyező modellek kaphatók [28]. Az 1.2. fejezetben néhány nem konstans energiasűrűséggel rendelkező sötét energia jelöltet mutatok be.



1.6. ábra. A Ratra-Peebles potenciálra ($U \propto \varphi^{-\alpha}$) a Gold (felső sor) és az SNLS (alsó sor) adatok felhasználásával számolt 68%, 95% és 99%-os konfidencia régiókat mutatja az $(\alpha, \Omega_\rho \equiv \Omega_M)$ (bal oszlop), illetve a $(w_\phi \equiv \omega_\phi, \Omega_\rho \equiv \Omega_M)$ (jobb oszlop) paramétersíkon. A jobb oszlopban pontozott vonal adja az XCDM (ρ_X energia sűrűséggel és w_X barotropikus indexszel rendelkező) modell valószínűségi kontúrait (95% és 99% a Gold adatok esetén, 68%, 95%, 99% az SNLS-re) [34].

1.2. Sötét energia jelöltek

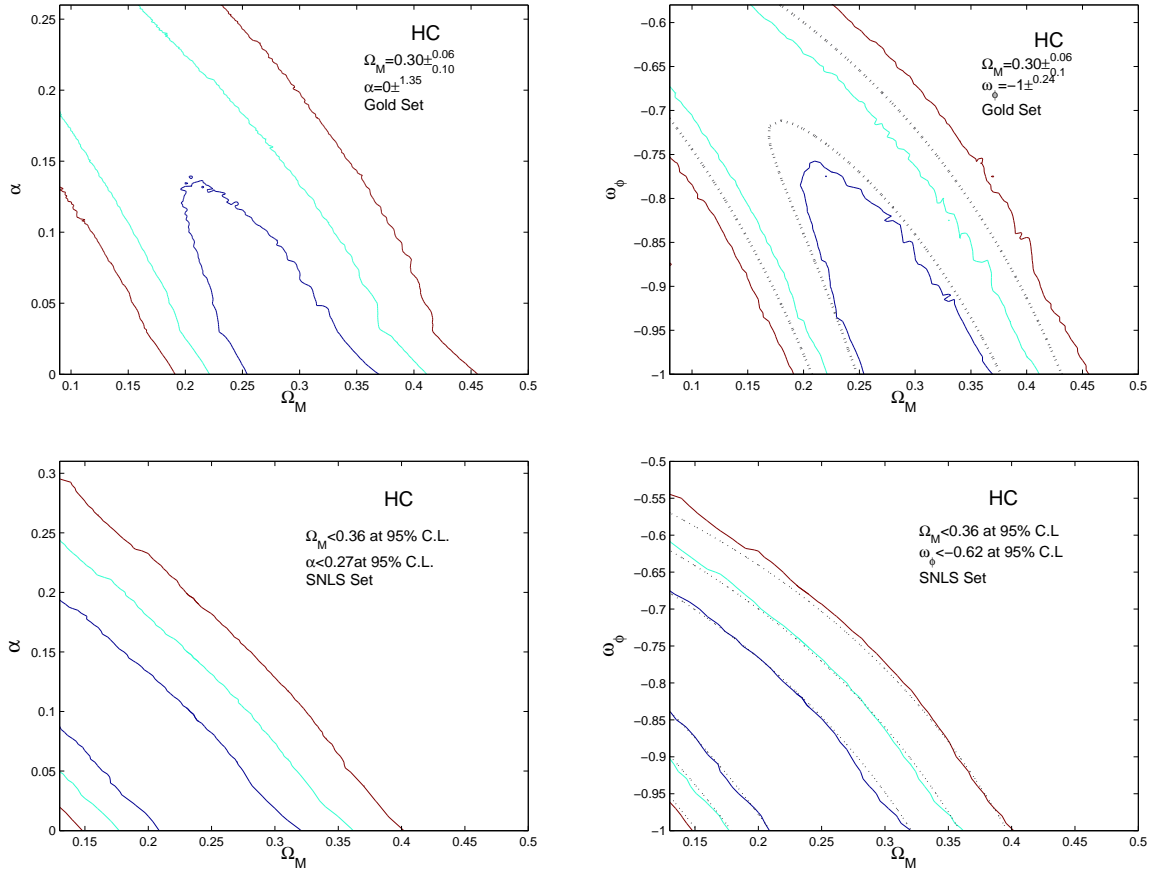
1.2.1. Kvintesszencia

Mivel különböző inflációs modellekben skalármezőket használnak az univerzum kvázi-exponenciális tágulási törvényből a hatvány szerintre való átmenet leírására, ezért természetes próbálkozás az univerzum jelenlegi gyorsuló tágulását is skalármező jelenlétével magyarázni. A *kvintesszencia* modellekben a gravitációhoz minimálisan csatolt közönséges skalármezőt használnak, amelynek Lagrange-sűrűsége:

$$L_\varphi = -\frac{1}{2}g^{ab}\nabla_a\varphi\nabla_b\varphi - U(\varphi) , \quad (1.8)$$

ahol $U(\varphi)$ a potenciál, g_{ab} az (1.1) metrika $k = 0$ -ra és ∇_a a metrikához asszociált kovariáns derivált. Bizonyos $U(\varphi)$ potenciálok esetén a mező késői inflációt okoz. Alább néhány potenciálra a főbb eredményeket foglalom össze:

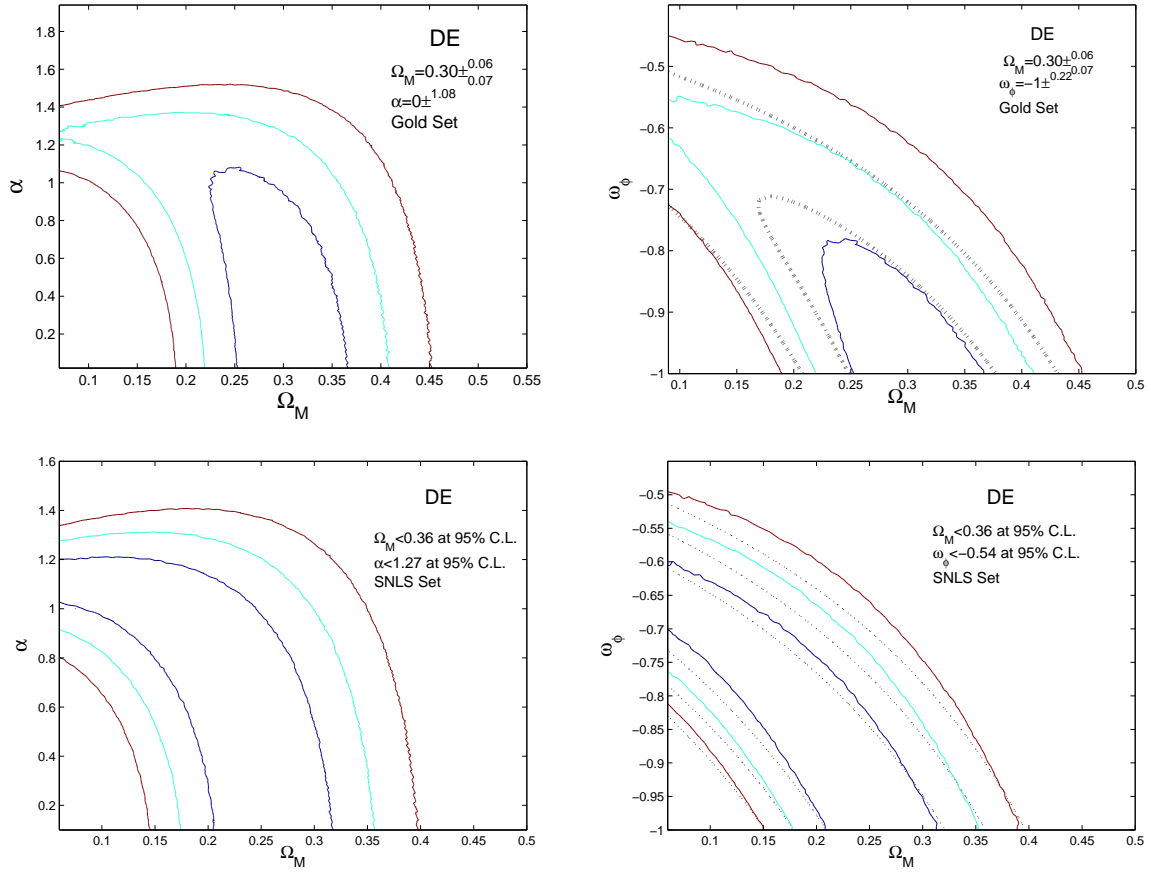
- Ahhoz, hogy a skalármező az $U \propto \varphi^2$ potenciál esetén gyorsuló tágulást eredményezzen jelenleg és konzisztens legyen az univerzum megfigyelt nagyskalájú struktúrájával, a



1.7. ábra. Ugyanaz, mint 1.6. ábrán, de koszinus hiperbólikus Sahni-Wang potenciálra ($U \propto (\cosh \lambda\varphi - 1)^\alpha$) [34].

skalármező energiasűrűsége nagyon pontosan hangolva kell legyen a poréhoz (*finomhangolási probléma*) [29]-[30].

- Az $U \propto \exp(-\lambda\varphi)$ potenciálra [31]-ben egy erős kényszert kaptak a nukleoszintézisből, amelynek eredményeképp jelenleg a skalármező nem dominálhat.
- Az $U \propto \varphi^{-\alpha}$ potenciálra, $\alpha > 0$ esetén a skalármező okozhatja az univerzum késői gyorsulását még akkor is, ha energiasűrűsége korábban elhanyagolható volt az anyag és a sugárzás komponensekéhez [32]. Továbbá a kezdeti feltételek széles tartományában ugyanahhoz az evolúcióhoz vezet, így egy úgynevezett “tracking” megoldást ad. A modell Gold [18] és az SNLS (Supernova Legacy Survey [33]) adatokhoz való illeszkedését az 1.6. ábra mutatja. A szupernóva adatokhoz és a transzverzális barion akusztikus csúcs mérésekhez a legjobb illeszkedést az $(\alpha = 0.27, \Omega_\rho = 0.24)$ paraméterekre kapták [35].
- Az $U \propto \exp(\lambda\varphi^2)/\varphi^\alpha$ potenciálra [36]–[37]-ben megmutatták, hogy $\alpha \geq 11$ -re a finomhangolási probléma elkerülhető, és a modell $\Omega_\rho = 0.3$ -ra $w_\varphi = p_\varphi/\rho_\varphi = -0.82$ vezet, ami jó összhangban van a megfigyelésekkel.
- Az $U \propto (\cosh \lambda\varphi - 1)^\alpha$ potenciálra $w_\varphi = (\alpha - 1)/(\alpha + 1)$, ezért a mező $\alpha = 1$ -re sötét anyagnaként, amíg $\alpha < 1/2$ -re az erős energia-feltételt sértő anyagnaként viselkedik [29]. A Gold és az SNLS adatokhoz való illeszkedést az 1.7. ábra mutatja.
- A [38]-ban ajánlott $U \propto \exp(\alpha\kappa\varphi) + \exp(\beta\kappa\varphi)$ potenciálú skalármezőre, ahol κ a gravitációs csatolási állandó négyzetgyöke, a $\beta = 20$ rögzített értékre a modell szupernóva adatokkal való összevetésének eredménye az 1.8. ábrán látható.



1.8. ábra. Ugyanaz, mint 1.6. ábrán, de dupla exponenciális Barreiro-Copeland-Nunes potenciálra ($U \propto \exp(\alpha\kappa\varphi) + \exp(20\kappa\varphi)$) [34].

- Az $U \propto \exp(M_{pl}/\varphi) - 1$, ahol M_{pl} Planck tömeg [39], szintén egy “tracking” megoldást ad. Azonban ahhoz, hogy az anyag dominált időszak alatt $\Omega_\varphi \ll 1$, és most $\Omega_\varphi \approx 1$ teljesüljön, $\varphi \gg M_{pl}$ kell legyen jelenleg, így $U \propto \varphi^{-1}$ a késői univerzumban [40].

Más potenciálokra lásd [30] és [41], illetve a hivatkozásokat bennük.

1.2.2. Tachion mező

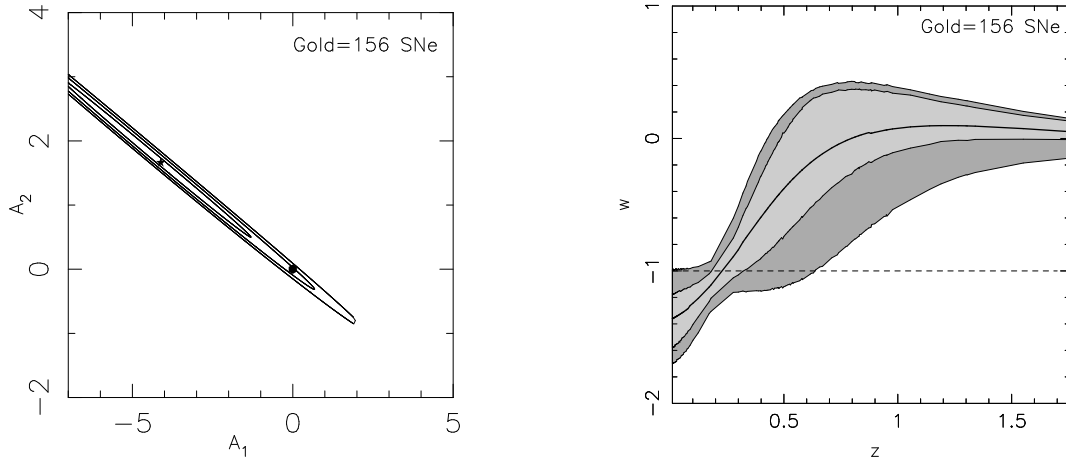
Egy másik lehetséges jelölt a sötét energiára a tachion skalármező, amelynek Lagrange-sűrűsége

$$L_{tach} = -V(T)\sqrt{1 + g^{ab}\nabla_a T \nabla_b T}. \quad (1.9)$$

Az 1.3. fejezetben látni fogjuk, hogy míg a kvintesszencia modellekben megjelenő skalármező Lagrange-sűrűsége az egy dimenziós nem relativisztikus mozgást végző részecske Lagrange függvényének, addig a tachion mezőé a relativisztikus részecskéjének természetes mező elméleti általánosításaként tekinthető. A csupán időtől függő tachion mező is egy ideális folyadék.

A $V(T) \propto T^{-2}$ és $\propto \exp(-T/T_0)$ potenciálok esetén a modellek paramétereiknek igen széles tartományában kitűnő illeszkedést mutattak a szupernóva adatokkal [42].

A tachion mezők nem csupán sötét energia, hanem sötét anyag jelöltek is. Két legördülő (“rolling down”) tachion modellt [43]-ban vizsgáltak. Egyik esetben a potenciál kvadrátikus minimummal rendelkezik $V(T) \propto (T - T_0)^2$, míg a másikban a tachion mező nagy értékeire exponenciálisan eltűnik $V(T) \propto \exp(-T/T_0)$. Az első esetben a mező legördül a potenciál minimumába és akörül oszcillál. A minimumban $w_T = -1/3$, ami a sugárzás barotropikus indexének felel meg, vagyis nem sötét energiaként viselkedik. A másik potenciálnál a mező legördül a végtelenbe, ahol $w_T = 0$, így port ad. Azonban a mező fluktuációinak tanulmányo-



1.9. ábra. A gold szupernóva adatokkal való összevetés eredménye $\Omega_\rho = 0.3$ -ra. Baloldalon a tesztből kapott 1σ , 2σ és 3σ tartományok láthatók az (A_1, A_2) paraméterterben. A jobboldal mutatja az 1σ és 2σ tartományokhoz tartozó $w_{DE}(z)$ fejlődést [49].

zásakor kiderült, hogy a perturbációk túl korán válnak nem-lineárisá. A tachion perturbációk így nagy skálán nem reprodukálták a szokásos hideg sötét anyagét, amik még lineárisak azon a skálán. A közönséges hideg sötét anyag perturbációkkal pedig jól meg lehet magyarázni az univerzum megfigyelt struktúráját.

A tachion mezőről bővebben az 1.3. fejezetben lesz szó, ahol az evolúciót egy más $V(T)$ potenciál esetén mutatom be, és azt modellt a 3.1.1. fejezetben vetem össze a szupernóva megfigyelésekből származó távolságmodulus adatokkal.

1.2.3. Fantomok

A kvintesszencia modellekben a barotropikus index $w_\varphi \geq -1$ a teljes evolúció során. Megfordítva a Lagrange-sűrűségben a kinetikus energia tag előjelét $w_\varphi < -1$ lesz. Ezeket a skalármezőket nevezik *fantomoknak*. A maximummal rendelkező potenciálokra a mező a potenciál maximuma körül (ahol $w_\varphi = -1$) végez csillapított rezgő mozgást, így a késői fejlődés függetlenül a kezdeti feltételektől de Sitter jellegű lesz [44]-[45]. Ilyen maximummal rendelkező potenciál például az $U(\varphi) = U_0 \cosh^{-1}(\alpha\varphi/M_{pl})$, amelyre a legjobban illeszkedő fantom modell kozmológiai paramétereinek jelenlegi értékei: $w_\varphi = -1.74$, $\Omega_\rho = 0.3$, $\Omega_\varphi = 0.7$ [45].

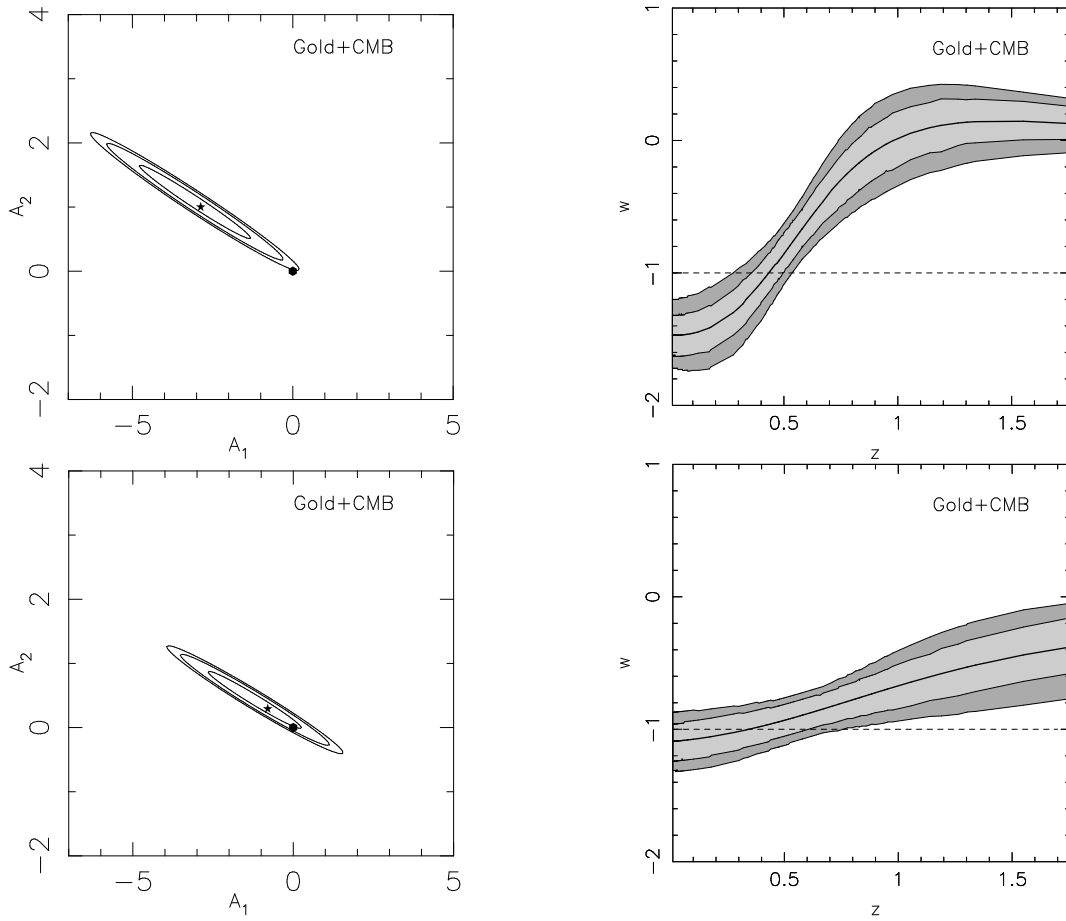
1.2.4. Chaplygin gáz

A $p = -A/\rho$ ($A > 0$ konstans) állapotegyenletű ideális folyadékot *Chaplygin gáznak* nevezik. Mivel tachion mező esetében $p = -V^2(T)/\rho$, így a Chaplygin gáz konstans potenciálú tachionnak is tekinthető. Ilyen egyszerű állapot-egyenlet esetén a folytonossági egyenlet könnyen integrálható [46]:

$$\rho = \sqrt{A + B \left(\frac{a_0}{a}\right)^6}, \quad (1.10)$$

ahol B integrálási konstans és a_0 a skálafaktor jelenlegi értéke. A skálafaktor kis értékeire $\rho \propto a^{-3}$, vagyis porként viselkedik. Késői univerzumban $\rho \approx -p \approx \sqrt{A}$, ami a kozmológiai állandónak felel meg. Így ez az anyag egyszerre betöltheti mind a sötét anyag és a sötét energia szerepét. Chaplygin gáz megkonstruálható közönséges skalármezőből is az

$$U(\varphi) = \frac{\sqrt{A}}{2} \left(\cosh(\sqrt{3}\kappa\varphi) + \frac{1}{\cosh(\sqrt{3}\kappa\varphi)} \right) \quad (1.11)$$



1.10. ábra. A baloldali oszlopban a CMB és a gold SNIa kombinált elemzéséből származó 1σ , 2σ és 3σ tartományok láthatók az (A_1, A_2) paraméter térben. A jobboldali oszlop mutatja az 1σ és 2σ tartományokhoz tartozó $w_{DE}(z)$ fejlődést. A felső sorban a legjobban illeszkedő modell $\Omega_\rho = 0.385$ és $H_0 = 0.60$ km/sMpc-et használták, amíg az alsóban a Λ CDM-ből származó $\Omega_\rho = 0.27 \pm 0.04$ és $H_0 = 0.71 \pm 0.06$ km/sMpc priorokat [49].

potenciál választással [46]. Az eredeti Chaplygin gáz modellnek a WMAP mérte CMB hőmérsékleti fluktuációkkal való összevetésének statisztikai elemzése mutatja, hogy a modell több, mint 99.99%-os konfidencia szintig nem állja meg helyét [47].

Általánosított Chaplygin gáznak nevezik a $p = -A/\rho^\alpha$ állapotegyenletű ideális folyadékot. Ebben az esetben a folytonossági egyenlet megoldása

$$\begin{aligned} \rho &= \left[A + B \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3(\alpha+1)} \right]^{\frac{1}{1+\alpha}} \\ &= \rho_0 \left[1 - \Omega_{ch} + \Omega_{ch} \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3(\alpha+1)} \right]^{\frac{1}{1+\alpha}}, \end{aligned} \quad (1.12)$$

ahol

$$\rho_0 = (A + B)^{\frac{1}{1+\alpha}}, \quad \Omega_{ch} = \frac{B}{A + B}. \quad (1.13)$$

A barotropikus index jelenlegi értéke

$$w_{ch0} = \frac{A}{A + B}. \quad (1.14)$$

A modell $\alpha = 0$ -ra sík Λ CDM-ként viselkedik. Az univerzum anyageloszlását jellemző teljesítmény-

spektrum [9] összehasonlítása az általánosított Chaplygin gáz modellből számolttal mutatja, hogy α értéke nagyon pontosan nulla kell legyen [48]. Figyelembe véve Chaplygin gázon kívüli jelentős sötét anyag komponenst $\Omega_{dm} \approx 0.3$, a CMB és szupernóva adatokkal való összevetésből nyert kényszerek $-1 \leq w_{ch_0} < -0.8$ és $0 \leq \alpha < 0.2$ [47].

1.2.5. A sötét energia paraméterezéses rekonstrukciója

A fenti modellek megfigyelésekkel való összevetése mutatja, hogy sötét energiaként nem csak a kozmológiai állandó jöhet számításba, hanem olyan anyag is aminek az energiasűrűsége időben változik. Az energiasűrűség változásának alábbi parametrizációját

$$\frac{\kappa^2}{3H_0^2} \rho_{DE} = A_0 + A_1 (1+z) + A_2 (1+z)^2 \quad (1.15)$$

[49]-ben vizsgálták. Itt A_0 , A_1 és A_2 állandók. Sötét anyagot figyelembe véve a Hubble paraméter:

$$H^2(z) = H_0^2 [\Omega_\rho (1+z)^3 + A_0 + A_1 (1+z) + A_2 (1+z)^2] . \quad (1.16)$$

A Hubble paraméter z függését ismerve, a Raychaudhuri egyenlet [lásd később (1.73) egyenletet] felhasználásával a sötét energia komponens nyomása is kifejezhető. A barotropikus index fejlődése pedig

$$w_{DE}(z) = -1 + \frac{A_1 (1+z) + 2A_2 (1+z)^2}{3 [A_0 + A_1 (1+z) + A_2 (1+z)^2]} . \quad (1.17)$$

Az 1.9. ábra baloldala mutatja $\Omega_\rho = 0.3$ -ra a szupernóva megfigyelésekből származó konfidencia szinteket az (A_1, A_2) paramétersíkban. A konfidencia szintekhez tartozó fejlődése w_{DE} -nek a jobboldalon látható. Jelenlegi értéke közel van a kozmológiai állandóéhoz, a -1 -hez. Ellenben a $z \geq 1$ tartományban nem-relativisztikus anyagként viselkedik a sötét energia komponens. A sötét energia más paraméterezésére az 1.9. ábra módosul, lásd például [50]-[53]-ban. Az 1.10. ábrán a CMB és a gold SNIa adatok kombinált elemzéséből származó konfidencia szintek láthatók. A felső sorban a legjobban illeszkedő $\Omega_\rho = 0.385$ és $H_0 = 60$ km/sMpc-et használták. Az alsó sorban a Λ CDM modell tesztjének eredményéből származó $\Omega_\rho = 0.27 \pm 0.04$ és $H_0 = 71 \pm 6$ km/sMpc priorok figyelembe vételével kapott eredmények láthatók. Utóbbi esetben az ábrázolt tartományban w_{DE} végig negatív.

1.3. Bevezetés a Tachion kozmológiai modellbe

A felfedezett kozmikus gyorsulás [17], [54], [55] magyarázható azzal, hogy az univerzum sötét energiát tartalmaz (lásd [56], [57]). A sötét energiának az erős energia-feltételt sértő tulajdonsága vezet az univerzum gyorsuló tágulásához. Azon skalármezők, melyek csak időtől függenek, olyan források egyszerű formái, ahol az energia-impulzus tenzor ideális folyadékot ír le. Az állapot-egyenletben megjelenő barotropikus index szintén függ az időtől. A skalármezők megadhatók a Lagrange-sűrűségükkel, amelynek alábbi két alakja:

$$L_\varphi = -\frac{1}{2} g^{ab} \nabla_a \varphi \nabla_b \varphi - U(\varphi) , \quad (1.18)$$

$$L_{tach} = -V(T) \sqrt{1 + g^{ab} \nabla_a T \nabla_b T} \quad (1.19)$$

interpretálható az egy dimenziós mozgást végző részecskék Lagrange függvényének természetes általánosításaként. Az $U(\varphi)$ és $V(T)$ a mezőktől függő potenciálok. Az (1.18) Lagrange-sűrűség a nem relativisztikus részecske Lagrange függvényének

$$L_{nonrel} = \frac{1}{2} \dot{q}^2 - U(q) , \quad (1.20)$$

általánosításaként fogható fel, ahol mező elméletet úgy konstruáljuk meg, hogy $q(\tau)$ -nek a $\varphi(x^a)$ mezőt feleltetjük meg, míg \dot{q} -nek $-\partial^a \varphi \partial_a \varphi$ -t. Most tekintsünk egy m tömegű relativisztikus részecskét, melynek mozgását az

$$L_{rel} = -m\sqrt{1 - \dot{q}^2} \quad (1.21)$$

Lagrange függvény adja. A részecske energiája $E = m/\sqrt{1 - \dot{q}^2}$ az impulzusa $p = m\dot{q}/\sqrt{1 - \dot{q}^2}$, melyek kielégítik az $E^2 = m^2 + p^2$ relációt. Tömegmentes részecskére $E^2 = p^2$, amely az $m \rightarrow 0$ és $\dot{q} \rightarrow 1$ határesetnek felel meg, úgy hogy az $E = m/\sqrt{1 - \dot{q}^2}$ véges marad. Most q -nak megfeleltetve T mezőt, \dot{q}^2 -nek $-\partial^a T \partial_a T$ -t, megengedve m -nek a T -től való függését kapjuk (1.19)-et. Az (1.19) Lagrange-sűrűséget Sen Lagrange-sűrűségnek nevezik, és a húrelméletekben a tachion kondenzátum effektív skalármező leírására szolgál [58]-[61]. A fejezet hátralevő részében az (1.19) Lagrange-sűrűséggel adott, [1]-ben felfedezett tachion modellt tárgyalom.

A tachion mező Lagrange függvényének metrika szerinti variációjából származtatható az energia-impulzus tenzor, amely ideális folyadékot ír le a

$$\rho = \frac{V(T)}{\sqrt{1 - s^2}}, \quad (1.22)$$

energiasűrűséggel és

$$p = -V(T)\sqrt{1 - s^2} \quad (1.23)$$

nyomással. Itt fel volt téve, hogy a T tachion mező csak az idő függvénye, és bevezetésre került az $s = \dot{T}$ jelölés. Az Einstein egyenletekből következő Friedmann egyenlet $k = 0$ -ra

$$H^2 = \rho \quad (1.24)$$

$8\pi G/3 = 1$ -egységekben. A mező belső dinamikáját leíró folytonossági egyenlet [1]:

$$\frac{\dot{s}}{1 - s^2} + 3sH + \frac{V_{,T}}{V} = 0, \quad (1.25)$$

ahol a $,T$ jelölés a T szerinti parciális deriváltat jelenti. Feltéve, hogy az univerzum az evolúciója során végig tágul ($H > 0$), ez a következő alakba írható (1.24) és (1.22) egyenletek felhasználásával:

$$\dot{s} = -3\sqrt{V}(1 - s^2)^{3/4}s - (1 - s^2)\frac{V_{,T}}{V}, \quad (1.26)$$

Az (1.26) egyenlet megkapható például a hatás T szerinti variálásával felhasználva, hogy H a Friedmann egyenleten keresztül kifejezhető T -vel és s -el. A hatásnak a metrika és a T szerinti variációiból az (1.24) és (1.26) két független egyenlet kapható, ami meghatározza az univerzum és a mező dinamikáját.

Ismert, hogy izotróp kozmológiai modell esetén, a skálafaktor adott időfüggéséhez mindig lehet találni olyan minimálisan csatolt skalármezőt (röviden skalármező) L_φ Lagrange-sűrűséggel, amellyel lehet reprodukálni az adott kozmológiai evolúciót (lásd [62]). Mivel hasonló állítás igaz az L_{tach} Lagrange-sűrűséggel adott tachion mezőt tartalmazó kozmológiai modellekre, ezért a tachion és a minimálisan csatolt skalármező között lehet találni egy megfeleltetést, amikor azok a skálafaktor ugyanazon evolúciójához vezetnek [63]. Még pontosabban, kapcsolatot lehet találni az U és V potenciálok között abban az értelemben, hogy megfelelően választott kezdeti feltételek esetén ugyanazon $a = a(t)$ -hez vezetnek. Hangsúlyozni kell azonban, hogy a mezők tetszőleges kezdeti feltételei esetén a kozmológiai evolúciók drasztikusan különbözhetnek. Továbbá, megváltoztatva a kezdeti feltételeket, mondjuk a minimálisan csatolt skalármezőre, a modell kozmológiai evolúciója eltérő lesz, amihez alapvetően más tachion potenciál társítható. Így bármely skalármező potenciál rendelkezik a megfelelő tachion potenciálok egész (egy partaméteres) családjával. A $V(T)$ és $U(\varphi)$ potenciálok közötti megfeleltetést részletesen [1]-ben tárgyalták.

Többet megtudhatunk a tachion mező és a skalármező közötti megfeleltetésről, ha a T és φ mezőket, illetve $V(T)$ és $U(\varphi)$ potenciálokat kifejezzük a H Hubble paraméter segítségével. Mivel a Raychaudhuri egyenlet [amely az (1.24) és (1.26) egyenletek következménye]

$$\dot{H} = -\frac{3}{2}(\rho + p) , \quad (1.27)$$

ezért

$$s^2 = \frac{\rho + p}{\rho} = -\frac{2\dot{H}}{3H^2} , \quad V(T) = \sqrt{H^2 \left(\frac{2}{3}\dot{H} + H^2 \right)} , \quad (1.28)$$

és

$$\dot{\varphi}^2 = \rho + p = -\frac{2}{3}\dot{H} , \quad U(\varphi) = H^2 + \frac{1}{3}\dot{H} . \quad (1.29)$$

Az (1.28) és (1.29) egyenletek adják, hogy $\rho + p \geq 0$, vagy ekvivalensen $\dot{H} \leq 0$. Megkövetelve $V(T)$ potenciál valóságát, a tachion mezőre az (1.28) egy további feltételt ró ki:

$$\dot{H} \geq -\frac{3}{2}H^2 , \quad (1.30)$$

amely ekvivalens $p \leq 0$ -val [1]. Ezért a tachion mezők valós potenciál esetén speciálisabbak a minimálisan csatolt skalármezőknél.

Vizsgáljunk egy olyan kozmológiai modellt, amely kétkomponensű ideális folyadékot tartalmaz. Az egyik komponens állapot-egyenlete

$$p_1 = w\rho_1, \quad -1 < w \leq 1 , \quad (1.31)$$

amíg a másik komponens legyen a kozmológiai állandó

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda = -\Lambda, \quad \Lambda > 0 .$$

Így az univerzumban olyan ideális folyadék van jelen melynek nyomása

$$p = w\rho - (1 + w)\Lambda . \quad (1.32)$$

Ekkor a Hubble paraméter időfüggése [1]:

$$H = \sqrt{\Lambda} \coth \frac{3\sqrt{\Lambda}(1 + w)t}{2} . \quad (1.33)$$

Ahhoz, hogy találjunk olyan tachion kozmológiai modellt, amely reprodukálja (1.33) időfejlődést, valós tachion potenciálra elő kell írni: $p \leq 0$. Ez a feltétel teljesül, ha $-1 < w \leq 0$. Ekkor az (1.33) kozmológiai evolúciót a tachion mező a

$$V(T) = \frac{\Lambda}{\sin^2 \left[\frac{3}{2}\sqrt{\Lambda(1 + w)}(T - T_0) \right]} \sqrt{1 - (1 + w) \cos^2 \left[\frac{3}{2}\sqrt{\Lambda(1 + w)}(T - T_0) \right]} \quad (1.34)$$

potenciál esetén reprodukálja [1]. Az (1.34) potenciálra (1.26) alábbi egzakt partikuláris megoldásai találhatók [1]:

$$T(t) = \pm \frac{2}{3\sqrt{\Lambda(1 + w)}} \arctan \sinh \frac{3\sqrt{\Lambda}(1 + w)t}{2} + T_0 . \quad (1.35)$$

Tehát az (1.19) Sen Lagrange-sűrűséggel adott tachion mező elmélet az (1.34) potenciál esetén partikuláris megoldásként reprodukálja a Λ CDM modell dinamikáját $-1 < w \leq 0$ -ra. Az

(1.34) potenciálban $T_0 = 0$ vehető az általánosság megszorítása nélkül.

A következőekben a modell $w > 0$ -ra való kiterjesztéséről lesz szó. A $w > 0$ tartományban az (1.34) potenciál valósból a nullán keresztül tisztán képzetesbe mehet át. Ez azonban a Lagrange-sűrűségben kompenzálható azáltal, hogy a kinetikus tagot az $1 + \partial^a T \partial_a T < 0$ tartományban vizsgáljuk, így a szorzatuk megmarad valósnak [1]:

$$L = -V(T) \sqrt{1 + \partial^a T \partial_a T} = (\sqrt{-1})^2 V(T) \sqrt{1 + \partial^a T \partial_a T} = W(T) \sqrt{-1 - \partial^a T \partial_a T}, \quad (1.36)$$

ahol $W(T) = iV(T)$. Feltéve, hogy a T tachion mező csak az idő függvénye az

$$L = W(T) \sqrt{-1 - g_{\tau\tau} s^2} \quad (1.37)$$

Lagrange-sűrűséggel rendelkező mezőelmélet energia-impulzus tenzorában az energiasűrűség és a nyomás:

$$\rho = \frac{W(T)}{\sqrt{s^2 - 1}}, \quad (1.38)$$

$$p = W(T) \sqrt{s^2 - 1}. \quad (1.39)$$

A nyomás (ha jól definiált) pozitív.

Az (1.26) dinamikából következik, hogy a $w > 0$ tartományban, a $V(T)$ potenciálban a négyzetgyök alatti kifejezés és az $1 - s^2$ kinetikus tag egyszerre válik negatívvá. Amikor ez bekövetkezik, a Sen Lagrange-sűrűségből a

$$V(T) \rightarrow iV(T) = W(T), \quad (1.40)$$

$$\sqrt{1 + g_{\tau\tau} s^2} \rightarrow i\sqrt{1 + g_{\tau\tau} s^2} = \sqrt{-1 - g_{\tau\tau} s^2}, \quad (1.41)$$

cseréken keresztül kapott Lagrange-sűrűség jellemzi a rendszert [1], amelyben minden mennyiség valós marad.

Behelyettesítve az (1.34) potenciált az (1.26) egyenletbe, és az idő szerinti deriválásról áttérve T szerinti deriválásra, a következő egyenlet kapható az $s = s(T)$ fázis tér trajektóriákra [1]:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dT} = & -\frac{3(1-s^2)\sqrt{\Lambda}}{\sin \frac{3\sqrt{\Lambda(1+w)T}}{2}} \left(\frac{1 - (w+1) \cos^2 \frac{3\sqrt{\Lambda(1+w)T}}{2}}{1-s^2} \right)^{1/4} + \\ & \frac{3\sqrt{\Lambda(1+w)}(1-s^2)}{2s} \cot \left(\frac{3\sqrt{\Lambda(1+w)T}}{2} \right) \frac{(w+1) \cos^2 \frac{3\sqrt{\Lambda(1+w)T}}{2} + (w-1)}{1 - (w+1) \cos^2 \frac{3\sqrt{\Lambda(1+w)T}}{2}}. \end{aligned} \quad (1.42)$$

A (T, s) síkban az (1.35) egzakt partikuláris megoldásokra

$$s = \sqrt{1+k} \cos \frac{3\sqrt{\Lambda(1+k)}T}{2}, \quad (1.43)$$

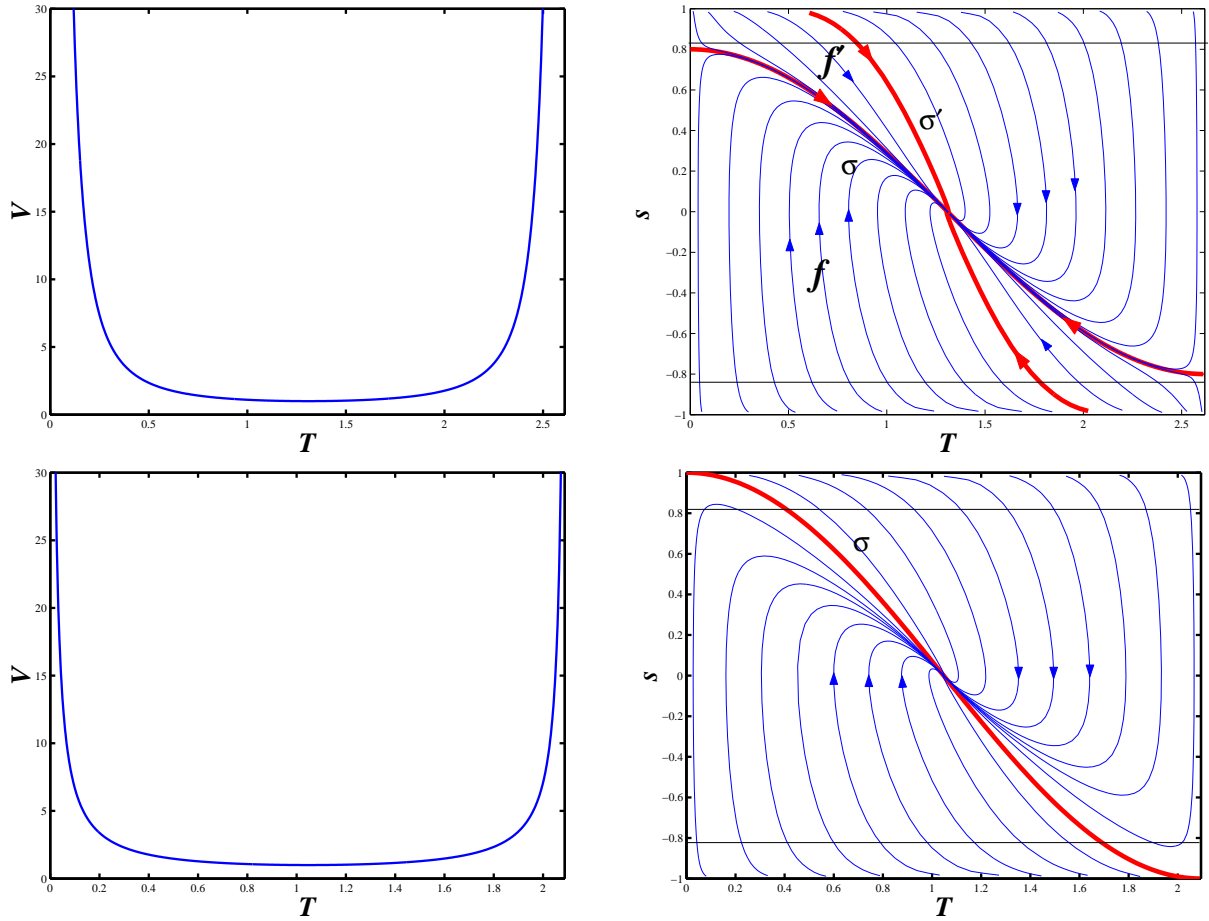
melyet az 1.11. és 1.12. ábrákon a σ görbe jelöl.

A $-1 < w \leq 0$ tartományban az (1.34) potenciál jól definiált a

$$0 < T < \frac{2\pi}{3\sqrt{\Lambda(1+k)}} \quad (1.44)$$

tartományban, a dinamika pedig garantálja, hogy

$$-1 < s < 1. \quad (1.45)$$



1.11. ábra. A potenciál és a fázis portré $w \leq 0$ estén. A felső sorban $w = -0.36$, míg az alsóban $w = 0$. Az $s = \pm\sqrt{2/3}$ vízszintes vonalak szeparálják a belső régiót, ahol az erős energia feltétel sérül (így az univerzum gyorsulva tágul), azoktól a szélső régióktól, ahol a tágulás lassuló. A jobboldali ábrák mutatják, hogy minden trajektória lassuló fázisban születik, majd átmennek gyorsulóba, és de Sitter végállapotban végződnek. A jobb alsó ábrán látható, ha $w > -1/3$, néhány görbének két lassuló és gyorsulva táguló fejlődési szakasza van. Az ábrákat [1]-ben publikálták.

A dinamikai rendszer rendelkezik egy kritikus ponttal:

$$s_0 = 0, \quad T_0 = \frac{\pi}{3\sqrt{\Lambda(1+k)}}. \quad (1.46)$$

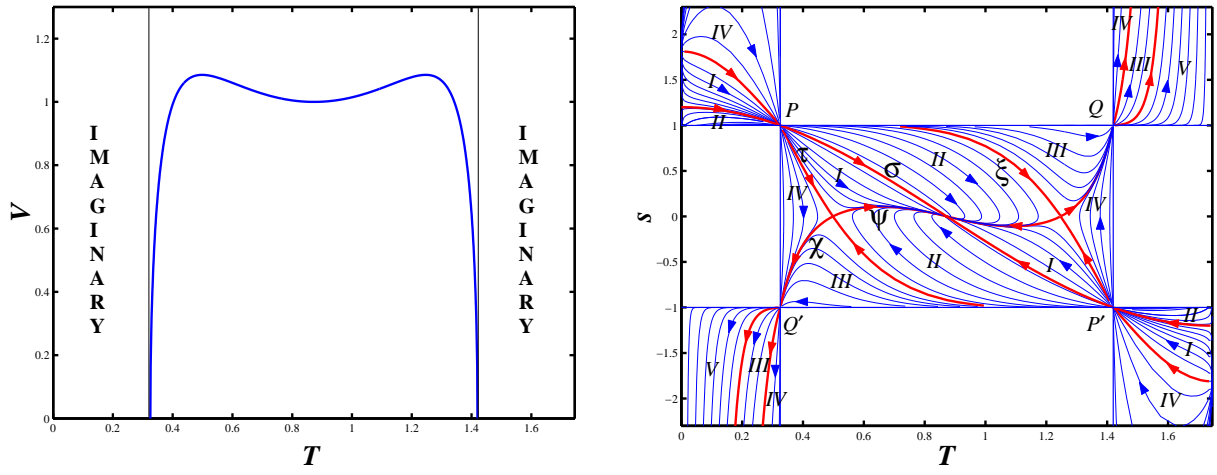
A kritikus pont környezetében linearizált dinamikai rendszer sajátértékei [1]:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{3}{2}\sqrt{\Lambda}(1 \pm k), \quad (1.47)$$

melyek valósak és negatívak. Ezért ez a speciális pont egy attraktív pont. A kritikus pontban a Hubble paraméter

$$H_0 = \sqrt{\Lambda}, \quad (1.48)$$

ami a de Sitter univerzum (kozmológiai állandó dominálta univerzum) expansiójának felel meg. Az (1.42) egyenlet integrál görbéi szimmetrikusak a kritikus pontra [1]. A σ görbe, amely szeparátrixként hat az integrálgörbékre, a $\lambda_1 = -\frac{3}{2}\sqrt{\Lambda}(1+w)$ sajátértékhez tartozik. Minden görbe a kritikus pontban végződik az 1.11. ábrán. A σ' -vel jelölt görbe kivételével, amely szintén egy szeparátrix, és a $\lambda_2 = -\frac{3}{2}\sqrt{\Lambda}(1-w)$ sajátértékhez tartozik, az összes görbe érintője a végpontban megegyezik a σ szeparátrixével [1]. A σ' görbe szeparálja azokat a görbéket, amelyek átmetszik az $s = 0$ tengelyt azoktól, amelyek nem metszik át azt. A $w = 0$ esetben a σ és σ' szeparátrixok egybe esnek. Az (1.44) és (1.45) egyenlettel adott téglalap határai



1.12. ábra. A potenciál (baloldal) és a fázis portré evolúció $w > 0$ -ra (itt $w = 0.44$) [1].

kozmológiai szingularitásokat írnak le. A Ricci skalár kifejezése sík Friedmann univerzumban:

$$R = 6(\dot{H} + 2H^2) . \quad (1.49)$$

Az (1.24), (1.27), (1.22) és (1.23) egyenletekből következik, hogy

$$R = 3H^2(4 - 3s^2) = \frac{3V(T)(4 - 3s^2)}{\sqrt{1 - s^2}} . \quad (1.50)$$

Mivel a téglalap függőleges oldalain a potenciál, míg a vízszintes oldalakon az $1/\sqrt{1 - s^2}$ divergál, így R a végtelenhez tart, ha a téglalap oldalaihoz tartunk, kivéve a sarkoknál [1].

A trajektóriák [1]-ben történt analízise mutatja, hogy a σ szeparátrix kivételével, amely a $(0, \sqrt{1+w})$ -ből ered és a $(\frac{2\pi}{3\sqrt{\Lambda(1+w)}}, -\sqrt{1+w})$ pontban végződik, egyetlen trajektória sem éri el a téglalap oldalait, így az $s = \pm 1$ tengelyekről erednek. Az $s = \pm 1$ tengelyek (kivéve a sarok pontokat) Ősrobbanást jelentenek.

Az erős energia-feltétel akkor sérül, ha

$$s^2 < \frac{2}{3} . \quad (1.51)$$

Ezért, ha $w \leq -\frac{1}{3}$, minden trajektória egy kezdeti lassulva tágulás után átmegy gyorsuló fázisba. A $w > -\frac{1}{3}$ tartományban a w értékétől függően található olyan kritikus kezdeti T_* érték, amelynél nagyobb kezdeti T értékre a trajektóriák két lassuló és két gyorsuló fázison esnek át (lásd 1.11. ábra).

A $0 < w < 1$ esetben az (1.34) potenciál a (T_3, T_4) intervallumban definiált jól, ahol

$$T_3 = \frac{2}{3\sqrt{(1+w)\Lambda}} \arccos \frac{1}{\sqrt{1+w}} , \quad T_4 = \frac{2}{3\sqrt{(1+w)\Lambda}} \left(\pi - \arccos \frac{1}{\sqrt{1+w}} \right) . \quad (1.52)$$

A dinamika biztosítja ebben a tartományban, hogy $-1 < s < 1$, ami (1.52)-el együtt egy téglalapot határoz meg. A téglalapon belül három fixpont van, amelyek egyike a potenciál minimumában lévő attraktív, de Sitter szimmetria pont (lásd (1.46) egyenlet), amíg a másik kettő a potenciál maximumának megfelelő nyeregpontok [1]:

$$T_1 = \frac{2}{3\sqrt{(1+w)\Lambda}} \arccos \sqrt{\frac{1-w}{1+w}} , \quad s_1 = 0 ; \quad (1.53)$$

$$T_2 = \frac{2}{3\sqrt{(1+w)\Lambda}} \left(\pi - \arccos \sqrt{\frac{1-w}{1+w}} \right), \quad s_2 = 0. \quad (1.54)$$

A nyeregpontok instabil de Sitter korszakot reprezentálnak.

A tachion univerzum egyik legmeglepőbb tulajdonsága, hogy $w > 0$ esetén a trajektóriák átmetszhetik a (T_3, T_4) és $-1 < s < 1$ intervallumokkal adott téglalap sarkait (a P , Q , P' és Q' pontok az 1.12. ábrán). Alábbiakban e pontok közelében részletezem a Ricci skalár viselkedését.

A $P = (T_3, 1)$ pont közelében vehető $s = 1 - s_*$ és $T = T_3 + T_*$, ahol T_* és s_* kicsik, de nem nullák. Ekkor (1.42) egyenlet közelítő alakja [1]:

$$\frac{ds_*}{dT_*} - \frac{s_*}{T_*} = A s_*^{3/4} T_*^{1/4}, \quad (1.55)$$

ahol A egy pozitív konstans. Az általános megoldás

$$s_* = \frac{1}{256} (AT_* + B)^4 T_*, \quad (1.56)$$

ahol B tetszőleges konstans [1]. A $Q = (T_4, 1)$ pont közelében véve $s = 1 - s_*$ és $T = T_4 - T_*$, a trajektóriákat közelítőleg leíró egyenlet [1]:

$$\frac{ds_*}{dT_*} - \frac{s_*}{T_*} = A s_*^{3/4} T_*^{1/4}, \quad (1.57)$$

ahol A ugyanaz a konstans, mint korábban. Az általános megoldás [1]:

$$s_* = \frac{1}{256} (-AT_* + B)^4 T_*, \quad (1.58)$$

ahol B egy tetszőleges pozitív konstans.

Ha a P , Q pontokat a P , Q , P' , Q' -vel határolt téglalap felől közelítjük, akkor a potenciál $V(T)$ és $s^2 < 1$. A $V(T)$ potenciál közelítő kifejezése a P és Q pont környezetében

$$V(T) = A_* T_*^{1/2} \quad (1.59)$$

alakú, ahol A_* egy pozitív konstans. Ezért, ha $B \neq 0$, az (1.56) és (1.58) megoldásokkal a Ricci skalár (1.50) kifejezése reguláris marad $T_* \rightarrow 0$ határesetben, míg ha $B = 0$, akkor a Ricci skalár divergál [1]. A $B = 0$ egyenletű görbék azokat a görbéket szeparálják a P és Q pontot elérő görbékétől, amik az $s = 1$ szingularitásból erednek, és számukra a sarok pontok szingularitást jelentenek. A többi trajektória esetén a sarok pontokban reguláris marad a geometria. Hasonló megjegyzések érvényesek akkor is, ha a P , Q pontokat nem a belső téglalap felől közelítjük [1] (ha $s^2 > 1$ és a potenciál $W(T)$). A rendszer szimmetriája miatt a P , Q -ra kapott állítások következnek P' , Q' -re is.

A dinamika általában nem szinguláris a P , Q , Q' és P' pontokban, ezért a kozmológiai evolúciót folytatni kell ezeken pontokon keresztül. Ezekben pontokban az (1.34) potenciál és a $\sqrt{1-s^2}$ kifejezés szimultán válik képzetessé, így a Lagrange függvény, illetve a tachion mező energiasűrűsége és nyomása is valós marad. A $-1 < w \leq 0$ paramétertartományban pedig a sarok pontok kivételével az $s^2 = 1$ -hez tartozó vízszintes tengelyek és a $T = 0$, $\frac{2\pi}{3\sqrt{\Lambda(1+w)}}$ egyenletű függőleges tengelyek mentén a Ricci skalár szinguláris.

Most a modellben fellépő szingularitások osztályozását mutatom be. A P és Q pontok kivételével, amikor $s \approx 1$ az $s(T)$ függvény [1]:

$$s = 1 - C(T_{in})(T - T_{in})^4, \quad (1.60)$$

ahol

$$C(T_{in}) = \frac{81}{32} \frac{\Lambda^2 \left(1 - (1+k) \cos^2 \frac{3\sqrt{\Lambda(1+w)T_{in}}}{2} \right)}{\sin^4 \frac{3\sqrt{\Lambda(1+w)T_{in}}}{2}} . \quad (1.61)$$

Az energiasűrűség $s \approx 1$ -re

$$\rho = \frac{V(T_{in})}{\sqrt{2C(T_{in})} (T - T_{in})^2} = \frac{4}{9 (T - T_{in})^2} , \quad (1.62)$$

míg a Hubble paraméter:

$$H = \frac{2}{3 (T - T_{in})} . \quad (1.63)$$

Az (1.63) egyenletben a skálafaktor időszerinti deriválásáról áttérve $T - T_{in}$ szerintire, és kihasználva, hogy $s = \dot{T} = 1$, kapjuk $T \rightarrow T_{in}$ -re $a \rightarrow 0$. Tudjuk, hogy a Ricci skalár szinguláris a P , Q pontok kivételével $s = 1$ -ben, így ez a vízszintes tengely Ősrobbanásnak felel meg (1.12. ábra mutatja, hogy az $s = 1$ egyenesről csak erednek, de nem végződnek trajektóriák). A modell szimmetriája miatt az $s = -1$ tengely a Q' és P' pontok kivételével szintén Ősrobbanást reprezentál.

Az $s = \sqrt{\frac{1+k}{k}}$, $T = 0$ pontból szintén születnek trajektóriák. Itt a W potenciál viselkedése [1]:

$$W(T) = \frac{4\sqrt{w}}{9(1+w)T_*^2} , \quad (1.64)$$

ahol $0 < T_* \ll 1$. Az energiasűrűség és a Hubble paraméter négyzete

$$\rho = H^2 = \frac{4w}{9(1+w)T_*^2} , \quad (1.65)$$

így szintén kapjuk, hogy az $s = \sqrt{\frac{1+k}{k}}$, $T = 0$ pont Ősrobbanást reprezentál.

Az 1.12. ábra mutatja, hogy a jobb felső és a bal alsó csíkból végződhetnek az $|s| = \infty$ -ben trajektóriák. Az s nagyértékeire (1.26) közelítő megoldása

$$|s| = \left(\frac{4}{81W(T_{BB})} \right)^{1/3} (\tau_{BB} - \tau)^{-2/3} , \quad (1.66)$$

ahol τ_{BB} azaz időpont, amikor $|s|$ eléri a végtelent, és T_{BB} a tachion mező értéke ekkor. A Hubble paraméter időfejlődése:

$$H = \left(\frac{9W^2(T_{BB})}{2} \right)^{1/3} (\tau_{BB} - \tau)^{1/3} . \quad (1.67)$$

Amikor $\tau \rightarrow \tau_{BB}$, a Hubble paraméter eltűnik, de a deriváltja divergál, ezért a Ricci skalár szintén divergál (a $-\infty$ -hez tart). A skálafaktor viselkedése felhasználva, hogy $\tau_{BB} - \tau \ll 1$:

$$a = a_{BB} - \frac{3a_{BB}}{4} \left(\frac{9W^2(T_{BB})}{2} \right)^{1/3} (\tau_{BB} - \tau)^{4/3} + \frac{9a_{BB}}{32} \left(\frac{9W^2(T_{BB})}{2} \right)^{2/3} (\tau_{BB} - \tau)^{8/3} , \quad (1.68)$$

ahol a_{BB} a skálafaktor értéke a szingularitás elérésekor. Ezt az új típusú szingularitást a következő kifejezések karakterizálják:

$$\ddot{a} \rightarrow -\infty , \quad \dot{a} \rightarrow 0 , \quad a \rightarrow a_{BB} , \quad (1.69)$$

amit Big Brake-nek (Nagy Megtorpanás) nevezünk. Azonban (1.22) és (1.23) egyenletek mu-

tatják, hogy a szingularitáshoz közelítve

$$p \rightarrow \infty, \quad \rho \rightarrow 0, \quad (1.70)$$

így ez egy úgynevezett SS szingularitás (Hirtelen szingularitás; lásd következő fejezet) is egyben. Az SS szingularitások stabilitását [64]-ben vizsgálták. A skálafaktor időbeli viselkedését a Big Brake közelében (1.68) egyenlet adja. A skálafaktor ilyen típusú viselkedésére [64] eredményei azt mutatják, hogy a kozmológiai modell mind tenzor, vektor és skalár típusú perturbációkra stabil.

A (T_3, T_4) és $-1 < s < 1$ intervallumok adta belső téglalapon kívül az 1.12 fázisdiagram tartalmaz négy végtelen csíkot is, ahol a trajektóriák futhatnak. Mivel a dinamikai rendszer szimmetrikus az attraktív de Sitter pontra, így elegendő a lehetséges kezdeti feltételek felét tekinteni (például az $s(\tau = 0) > 0$ -ra korlátozódva). A trajektóriák öt osztályba sorolhatók [1]. Az I. osztályba tartozók a $T = 0, s = \sqrt{\frac{1+w}{w}}$ pontból (amely standard Ősrobbanást jelent) erednek. A bal felső csíkban az I. osztályú görbék monoton csökkennek, és a P sarokponton keresztül belépnek a belső téglalapba, ahol az attraktív de Sitter pontban végződnek. A II. osztályú trajektóriákat a σ szeparátrix (amely a belső téglalapban összeköti a P pontot az attraktív de Sitter ponttal) választja el az I. osztályúaktól. A II. osztályú trajektóriák az $s = 1, T = T_{in}$ szingularitásból erednek, ahol $0 < T_{in} < T_*$, $T_* > T_3$, és az attraktív de Sitter pontban végződnek. A ξ szeparátrix, amely a jobboldali nyeregpontra végződik, a II. és III. típusú görbéket szeparálja. Az utóbbi az $s = 1$ és $T = T_{in}$ -ből ered (ahol $T_* < T_{in} < T_4$), és miután keresztezi a Q sarokpontot, a jobb felső csíkban a Big Brake szingularitásban végződik. A III. és IV. osztályú trajektóriákat a χ szeparátrix választja el, amely a jobb nyeregpontra ered, és azt összekapcsolja a Q sarokponttal. A IV. osztályba tartozó görbék ugyanonnan erednek, mint az I. típusúak. A IV. típusú görbék miután felveszik maximumukat csökkennek, keresztezik a P sarokpontot, így belépnek a belső téglalapba, majd a Q' -n keresztül elhagyják azt. Végül a bal alsó csíkban véges idő alatt Big Brake típusú szingularitásba futnak. Az I. és IV. trajektóriákat a τ szeparátrix választja el, amely a belső téglalapban a P pontot összekapcsolja a bal nyeregpontra. Az V. osztályú trajektóriák az $s = 1, T = T_{in} > T_4$ pontban kezdődnek, és Big Brake szingularitásban végződnek. Végezetül az 1.12. ábrán látható Ψ szeparátrix, amely a bal (vagy jobb) nyeregpontra ered, és az attraktív de Sitter pontban végződik, az $s > 0$ kezdő feltételű I. típusú görbéket szeparálja az $s < 0$ kezdő feltételű II. típusúaktól.

Ebben a fejezetben bemutatásra került egy olyan tachion kozmológiai modell, amely speciális esetekben reprodukál egy olyan univerzum fejlődést, ami a standard kozmológiában a kozmológiai állandó és egy $p = w\rho$ (ahol $-1 < w \leq 1$) állapotegyenletű ideális folyadékot tartalmazó univerzum esetén ismert. A megfelelő tachion potenciál a T tachion mező harmónikus függvényeit tartalmazta. Amikor a w paraméter pozitív a potenciál képzetessé válhat. Ez azonban nem okoz problémát, mert a dinamika biztosítja, hogy a tachion mező energiasűrűsége és nyomása valós marad. A dinamikai rendszer nagyon gazdag abban az értelemben, hogy a standard kozmológiához képest egy új típusú szingularitás jelenik meg a Big Brake. Annak tisztázása, hogy a játék tachion modell összevetése a megfigyelésekkel ignorálja-e a Big Brake jövőbeli bekövetkeztét hátra maradt. Az Ia szupernóva megfigyelésekre támaszkodva ezt a 3.1. alfejezetben vizsgálom.

1.4. Kozmológiai szingularitások

Amikor az univerzumot kitöltő anyagot az erős energia-feltételt teljesítő $p = w\rho$ állapotegyenletű ideális folyadékkal modellezzük, ahol $w > -1/3$ konstans, időben vissza felé fejlesztve az egyenleteket azt tapasztaljuk, hogy kezdetekkor a skálafaktor a nullához tart (speciális esetekre lásd 1.1 ábrát). Általános relativitáselméletben a kozmológia egyenletek: a folytonos-

sági egyenlet

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (1.71)$$

a Friedmann egyenlet

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{\kappa^2}{3}\rho, \quad (1.72)$$

és a Raychaudhuri egyenlet

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 = -\frac{\kappa^2}{6}(\rho + 3p), \quad (1.73)$$

ahol $\kappa^2 = 8\pi G$ a gravitációs csatolási állandó. Az első az energia-impulzus tenzor négyes divergenciájának eltűnéséből származik, amíg az utóbbi kettő az Einstein egyenletekből. A fenti három egyenlet közül csak kettő független egymástól, de 3 változót tartalmaznak: ρ -t, p -t és a -t. Ezért megoldásukhoz máshonnan szükséges venni egy egyenletet. Kinematikai leírásnál az a skálafaktorra tesznek fel valamilyen típusú időfüggést, általában polinomiálisat [65]. Az univerzumot kitöltő anyag ismeretében azonban lehet származtatni egy $p = w\rho$ állapot-egyenletet, ahol w speciális esetekben konstans. Az (1.1) metrika esetén a skalár görbület [4-dimenziós (4d) Ricci skalár]:

$$R = \frac{3\ddot{a}}{a} + \frac{6k}{a} = 3\left(\dot{H} + H^2\right) + \frac{6k}{a}. \quad (1.74)$$

Amikor a barotropikus index konstans (1.71) könnyen integrálható, és kapjuk:

$$\rho = \rho_* \left(\frac{a}{a_*}\right)^{-3(1+w)}, \quad (1.75)$$

így $a \rightarrow 0$ esetén az energiasűrűség, a nyomás és a Ricci skalár divergál. Az elmélet a $\tau \rightarrow \tau_*$ -ra (ahol τ_* kisebb, mint az univerzumunk τ_0 jelenlegi kora) ahol $a \rightarrow 0$ szingulárisává válik. Ezt a szingularitást Ősrobbanásnak nevezzük.

Szingularitások típusai: $\tau \rightarrow \tau_*$ esetén, ahol τ_* egy véges időpontot jelöl (alább a_* , ρ_* és H_* végesek):

- *Ősrobbanás (Big Bang)*: $a \rightarrow 0$ és $R \rightarrow \infty$ (múltbéli szingularitás).
- *Nagy Összeroppanás (Big Crunch)*: $a \rightarrow 0$ és $R \rightarrow \infty$ (jövőbéli szingularitás);
- *Egzotikus szingularitások* [66] (ha mást nem állítok $a \rightarrow a_*$):
 - *Szakadás (Big Rip)*: $a \rightarrow \infty$, $R \rightarrow \infty$, $p \rightarrow \infty$ és $\rho \rightarrow \infty$ [67];
 - *Véges skálafaktor szingularitás (FSF: finite scale factor singularity)*: $|p| \rightarrow \infty$, $\ddot{a} \rightarrow \infty$, $\rho \rightarrow \infty$, $H \rightarrow \infty$ és $R \rightarrow \infty$ [68];
 - *Hirtelen szingularitás (SS; sudden singularity)*: $p \rightarrow \infty$ és $R \rightarrow \infty$, de $\rho \rightarrow \rho_*$ és $H \rightarrow H_*$ [69];
 - *Általánosított hirtelen szingularitás (GSS; generalized sudden singularity)*: $a^{(r)} \rightarrow \infty$ és $p^{(r-2)} \rightarrow \infty$, ahol r egész, és a zárójeles index a zárójelben lévő rendű deriváltat jelenti [65];
 - *Elválás (BS; big separation)*: $\ddot{a} \rightarrow \infty$, $w = p/\rho \rightarrow \infty$, de $\rho \rightarrow 0$, $p \rightarrow 0$ [70];
 - *barotropikus (w) szingularitás*: $w = p/\rho \rightarrow \infty$ és $R \rightarrow \infty$, de $p \rightarrow 0$ és $\rho \rightarrow 0$ [71];
- *Nagy Megtorpanás (Big Brake)*: $a \rightarrow a_*$, $\dot{a} \rightarrow 0$, de $\ddot{a} \rightarrow -\infty$ és $R \rightarrow \infty$ [1]. Érdekes megjegyezni ezen a ponton, hogy bár az explicit feltételek különböznek az SS szingularitásától, de (1.72)-(1.73) egyenletek mutatják, hogy a Big Brake alete az SS-nek.

A Big Bang és Big Crunch ugyanazt a típusú szingularitást képviselik, az előbbi egy múltbeli, míg az utóbbi egy jövőbeli eseményt takar. A kozmológiai szingularitásoknak ezt a típusát ismerték meg legkorábban. Ezek a szingularitások megjelennek a Λ CDM modellben is bizonyos paramétertartományok esetén (lásd 1.4. ábrát). A Big Rip, FSF, SS és BS szingularitások megjelennek fantom kozmológiai modellekben [66]-[67], [70] és [72]. Kinematikai modellekben megjelennek az SS, FSF, GSFS, BS és w szingularitások [65], [66], [68]-[71]. Az FSF és SS szingularitások az általánosított Chaplygin gáz modellekben is feltűnnek [73]. Az általánosított Chaplygin gáz modellekben az SS szingularitást *Fagyásnak* (*big-freeze*) nevezik, a múltbeli SS szingularitást pedig *Elindulásnak* (*big-démarrage*).

A felsorolt szingularitások bizonyos körülmények között a hurok-quantumgravitációban és a kvantum-geometrodinamikában elkerülhetők [74]-[82]. A dolgozat szempontjából külön fontosságú az 1.3. fejezetben tárgyalt tachion modellben megjelenő Big Brake szingularitás elkerülhetősége [78], ami összhangban áll a 3.2.2. fejezetben bemutatásra kerülő eredménnyel.

1.5. Alternatív gravitációs modellek

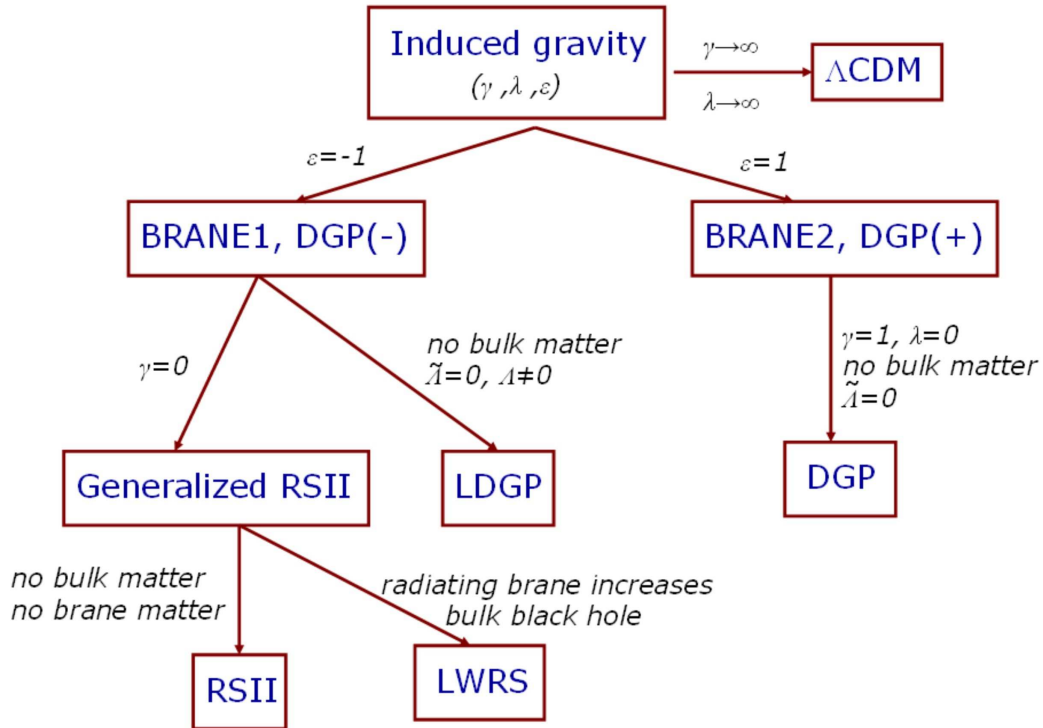
A gravitációs dinamikát leíró Einstein egyenlet

$$G_{ab} = \kappa^2 T_{ab} \quad (1.76)$$

(ahol G_{ab} az Einstein tensor, κ^2 a gravitációs csatolási állandó és T_{ab} az energia-impulzus tenzor) megváltoztatása szintén okozhat olyan hatásokat, mint a sötét energia, vagy a sötét anyag.

Az általános relativitáselmélet Lagrange-sűrűsége vákuum esetén $\mathcal{L}_G = \sqrt{-g}R$ (ahol g a metrika determinánsa és R a Ricci skalár). Az általános relativitáselméletben a kovariáns deriválás kompatibilis a metrikával: $\nabla_a g_{bc} = 0$. A hatásfüggvény variációját több módon is elvégezhetjük. Feltéve a variálás során a kovariáns deriválás végig kompatibilis a metrikával \mathcal{L}_G csak a metrikától és annak parciális deriváltjaitól függ (*metrika formalizmus*). A *Palatini-féle variációnál* a konnexitét függetlenül kezeljük a metrikától (ezért $R = g^{ab}R_{ab}$ kifejezésben R_{ab} a g_{ab} metrikától függetlenül konnexitéval megkonstruált mennyiség), így \mathcal{L}_G a metrikától és a konnexitétől függ. Mindkét eljárásban a variáció elvégzése után a kovariáns deriválás a metrikával kompatibilis lesz, és ugyanazt a mező egyenletet, az Einstein egyenletet eredményezi a metrikára. Anyagi mező jelenléte esetén a Palatini variációnál az anyag hatás függvény független a konnexitétől. Az $f(R)$ ([83]-[88]), vagy az inverz görbületi gravitációs modellekben [89] az \mathcal{L}_G Lagrange-sűrűséget módosítják. Az $f(R)$ gravitáció esetén $\mathcal{L}_G = \sqrt{-g}f(R)$, ahol f tetszőleges függvénye R -nek, így végtelen sok ilyen modell létezik. A Lagrange-sűrűség ilyen módon történő megváltoztatása azt eredményezi, hogy az előbb bemutatott kétféle variációs eljárás nem vezet ekvivalens eredményekre. Belátható, hogy a Palatini-féle variáció mindig másodrendű differenciálegyenletekre vezet, míg a másik eljárás általában magasabb rendűekre. A Palatini variáció általánosítása a *metrikus affin formalizmus* [90], ahol az anyagi mezők hatásfüggvénye függhet a konnexitétől. Az anyagi mező hatásfüggvényének a metrika szerinti variációja az energia-impulzus tenzort eredményezi, a konnexité szerinti variációja a hipermomentumot. A metrikus affin formalizmus torziós elmélet, ami annak lehetőségét hordozza magában, hogy természetesebb módon ki lehet terjeszteni fermionokat tartalmazó elméletté. A legintenzívebben vizsgált $f(R)$ gravitációs modell az $f(R) = R - \beta/R^n$. A metrika formalizmusban egy sor problémára derült fény, nem sikerült illeszteni a naprendszer belső tesztekhez [91], [92], korrekt newtoni határesethez jutni [93] és instabilitások lépnek fel [94]. Megmutatták, hogy nem lehet reprodukálni egy standard anyag-dominálta korszakot, amit gyorsuló tágulás követ [95]. A Palatini formalizmusban sikerült reprodukálni a kozmológiai evolúció utolsó 3 korszakát, a sugárzás-dominálta, az anyag-dominálta korszakot, amiket késői gyorsuló tágulás követ [96] és [97]. Kielégíti a naprendszerbeli tesztek, korrekt newtoni határesettel rendelkezik [98] és instabilitásoktól mentes [99], [100]. A modell szintén illeszkedik az Ia típusú szupernóva, a CMB adatokkal és a megfigyelt barion oszcillációs csúcsokkal [97], [101]. Az SDSS adatokra

támaszkodva [102]-ben megmutatták, hogy a [103] cikkben ajánlott $f(R) = R^n$ modell jóslatai összhangban állnak a megfigyelésekkel, amíg a MOND-ból (Modified Newtonian Dynamics) kifejlődött TeVeS elméletéi (a név a Tensor-Vektor-Skalár tartalomra utal) ([104], [105]) nem.



1.13. ábra. A különböző brán-világ modellek és egymáshoz képesti relációjuk látható. Az LWRS egy általánosított RS2 modell 4d kozmológiai konstanssal, amelyben a brán speciális sugárzást bocsájt az extra dimenzióba.

A gravitációs kölcsönhatás szintén megváltozik, ha a 4-dimenziós téridőt extra térszerű dimenziókkal gazdagítjuk. Először Kaluza és Klein vetette fel kompakt térdimenziók lehetőségét. A húrelmélet / M-elmélet motiválta brán-világ modellekben a megfigyelhető univerzumunk egy 4d téridő hiperfelület (a brán) magasabb dimenziós téridőbe ágyazva, amikor az extra dimenziók kompaktak [106], [107], [108], és amikor egy nem kompakt extra dimenzió is megengedett [109]. Utóbbi a Randall-Sundrum 2-es típusú brán modell, amit (illetve általánosításait) a dolgozat 1.6. fejezetében részletesebben is bemutatok, mivel a 2. fejezetben elért eredmények erre a modellre támaszkodnak. A bránon az Einstein egyenlet helyett egy úgynevezett effektív Einstein egyenlet lesz érvényes [110], aminek köszönhetően mind a korai kozmológia [111], mind a gravitációs kollapszus alapvetően megváltozik [112]-[114]. A galaktikus forgás-görbéket és a galaxis-halmaz dinamikát meg lehet magyarázni sötét anyag nélkül [115]-[118]. Az úgynevezett indukált gravitációs modellekben, aminek két ága közül az egyik határeset az RS2 modell, figyelembe veszik a brán anyag és az 5d gravitonok kölcsönhatásából származó elsődleges kvantum-korrekciókat. Ezért az effektív Einstein egyenlet még inkább módosul. Az indukált gravitációs korrekció a $\gamma\tilde{\kappa}^2/\kappa^2$ konstanssal csatolódik az 5d Einstein-Hilbert hatásához. A legegyszerűbb ilyen modell [119] azonban lineárisan instabilnak bizonyult a nagyon egyszerű de Sitter bránok esetén [120]-[122]. Az instabilitást jelentő ghost módusok fellépnek akkor is, ha az előző brán mellett bevezetünk egy másikat [123]. Az indukált gravitációs modellek [DGP (Dvali-Gabadadze-Porrati)] általánosításait szimmetrikus brán beágyazás mellett [124]-ben és [125]-ben dolgozták ki, míg aszimmetrikus beágyazás esetén [126]-ban. Ezekben a modellekben az effektív Einstein egyenlet tartalmazza a 4d Einstein tenzor kvadratikusan kifejezéseit, aminek következtében a módosított Friedmann és Raychaudhuri egyenletek levezetésében egy

négyzetgyököket kell vonni. A négyzetgyökvonás miatt fellépő előjel bizonytalanság: $\varepsilon = \pm 1$ a brán modellek két ágához vezet. A BRANE1 [DGP(-)] ág tartozik a negatív négyzetgyökvonáshoz ($\varepsilon = -1$ -hez) és BRANE2 [DGP(+)] ág az $\varepsilon = 1$ -hez [124] [vagy [127]] terminológiáját követve. Az $\varepsilon = 1$ ágban az indukált gravitációs effektus késői gyorsuló tágulást eredményez. Az 1.13. ábra mutatja, egy nem-kompakt extra térdimenzió esetén a brán modellek osztályozását, és egymáshoz való kapcsolatukat.

Láttuk ahhoz, hogy a megfigyeléseket elméletileg értelmezni tudjuk módosítani kell az (1.76) Einstein egyenletet olyan módon, hogy vagy az energia-impulzus tenzorba kell betenni valamilyen nem standard anyagot, vagy a gravitációs dinamikát kell megváltoztatni. A dolgozatban mindkét lehetőséget tekintetbe veszem, és a modelleket összevetem az Ia típusú szuper-nóva megfigyelésekkel.

1.6. Bevezetés az RS2 brán-világ modellekbe

RS2 típusú brán-világ modell esetén a megfigyelhető univerzum egy 5d téridőbe ágyazott 4d időszerű hiperfelület a brán. A gravitáció 5d-ben hat az Einstein-Hilbert hatás szerint. Az 5d Einstein egyenlet:

$$\tilde{G}_{ab} = \tilde{\kappa}^2 \left[\tilde{T}_{ab} + \tau_{ab} \delta(y) \right], \quad (1.77)$$

ahol \tilde{G}_{ab} az 5d Einstein tenzor, $\tilde{T}_{ab} + \tau_{ab} \delta(y)$ az 5d energia-impulzus tenzor és $\tilde{\kappa}^2$ az 5d gravitációs csatolási állandó. A gravitáció kivételével minden standard kölcsönhatás és anyagi mező a bránra korlátozott, így az 5d energia-impulzus tenzor rendelkezik egy disztribúcionális résszel. Húrelméleti nézőpontból az univerzumunk egy Dirichlet 3-brán. A nyitott hurok, amelyek végpontjai a bránon végződnek, de azon szabadon mozognak adják a disztribúcionális brán anyagot, amíg a gravitációs szektor zárt húrjai bejárhatják a teljes magasabb dimenziós téridőt. Az 5d energia implzus tenzorban \tilde{T}_{ab} képviseli az 5 dimenzióban létező nem standard anyagot, míg τ_{ab} az $y = 0$ pozíciónál lévő brán energia-impulzus tenzora. Ez utóbbi két részből áll:

$$\tau_{ab} = \lambda q_{ab} + T_{ab}, \quad (1.78)$$

ahol λ a brán-feszültség, q_{ab} a bránon indukált metrika és T_{ab} a brán anyag energia-impulzus tenzora. Jelöljön $n^a = dx^a/dy$ egy olyan egység normájú, térszerű vektormezőt, amely merőleges a bránra. Az 5d metrika felbontható, mint

$$\tilde{g}_{ab} = n_a n_b + g_{ab}, \quad (1.79)$$

ahol $g_{ab} n^a = 0$. Ekkor $g_{ab}(y=0) = q_{ab}$.

A brán két régióra bontja az 5d téridőt. Ezek a régiók összeilleszthetők a brán mentén, ha $\Delta g_{ab} = 0$, ahol Δ a mennyiségeknek a brán két oldalán vett értékének különbségét jelöli. Az Einstein egyenletből következik [128], [129]:

$$\Delta {}^{(4)}K_{ab} = -\tilde{\kappa}^2 \left(\tau_{ab} - \frac{\tau}{3} g_{ab} \right), \quad (1.80)$$

ahol ${}^{(4)}K_{ab}$ a brán külső görbülete. Az (1.22) egyenletet *Lanczos-Israel illesztési feltétel*nek nevezzük. Értelmezése: (i) a bránon lévő disztribúcionális anyag ugrást hoz létre a brán külső görbületében; (ii) avagy a brán külső görbületében okozott ugrás disztribúcionális anyagot indukál a bránon. Amikor a brán beágyazása tükörszimmetrikus, akkor $\Delta {}^{(4)}K_{ab} = 2 {}^{(4)}K_{ab}$, így a disztribúcionális anyag meghatározza a brán külső görbületét.

Az 5d Einstein egyenlet $g_a^c n^d$ projekció brán két oldalán vett különbsége eredményezi, hogy [130]

$$\Delta \left(g_a^c n^d \tilde{T}_{cd}^{reg} \right) = -\nabla^c T_{ca}, \quad (1.81)$$

ahol ∇_a a q_{ab} indukált metrikához asszociált kovariáns derivált. Ezért, ha $\tilde{T}_{ab}^{reg} = 0$, visszkapjuk az általános relativitáselméletben ismert $\nabla^c T_{ca} = 0$ kétszer kontrahált Bianchi azonosságot.

A mindkét indexében bránra vetített 5d Einstein egyenlet brán két oldalán kiértékeltségének átlaga adja az úgynevezett *effektív Einstein egyenletet* [130]:

$$G_{ab} = - \left(\Lambda - \frac{\tilde{\kappa}^2 \langle \tilde{\pi} \rangle}{2} \right) g_{ab} + \kappa^2 T_{ab} + \tilde{\kappa}^4 S_{ab} - \langle {}^{(4)}\mathcal{E}_{ab} \rangle + \langle L_{ab} \rangle + \langle \mathcal{P}_{ab} \rangle, \quad (1.82)$$

ahol $\langle \cdot \rangle$ a mennyiségek átlagát jelölik. Forrásként a T_{ab} energia-impulzus tenzor, és Λ 4d kozmológiai állandón kívül megjelenik, egy a nagy energiákon domináns T_{ab} -ben kvadratikusan tag az S_{ab} ; különböző járulékok az 5d anyagból (T_{ab}^{reg} -ből) \mathcal{P}_{ab} és $\tilde{\pi}$; a brán asszimmetrikus beágyazásának járuléka L_{ab} ; és a magasabb dimenziós gravitációs hatások járuléka ${}^{(4)}\mathcal{E}_{ab}$, ami a \tilde{C}_{acbd} 5d Weyl tensor $n^c n^d$ projekciója. Az (1.82) egyenlet általában nem csatlakozik le a többi 5d egyenletről, a formula azonban jól mutatja ahogyan megváltozik a gravitációs törvény a bránon. A brán szimmetrikus beágyazása és $\tilde{T}_{ab}^{reg} = 0$ esetén, alacsony energiákon mindössze $\langle {}^{(4)}\mathcal{E}_{ab} \rangle$ adhat nem standard járulékot, ami például 5d Anti-de Sitter téridő (AdS_5) esetén zérus. Perturbált AdS_5 téridőbe szimmetrikusan ágyazott gömbszimmetrikus forrás esetén a bránon a szokásos Schwarzschild potenciálnak ($\propto 1/r$) megjelenik egy $1/r^3$ -el skálázódó korrekciója [131], [132].

Az eredeti RS2-modell 5d Anti-de Sitter téridőbe ágyazott Minkowski bránt tárgyal. Az általánosításai igen változatosak és sokrétűek. Azokat a bránokat, melyek kozmológiai szimmetriákkal rendelkeznek Friedmann bránoknak nevezzük. Amikor megköveteljük 5d-ben az n^a -ra merőleges 4d hiperfelületeken a kozmológiai szimmetriákat, és az 5d anyag csupán a kozmológiai állandó, akkor a Friedmann bránok az 5d Schwarzschild-Anti-de Sitter téridőbe (SAdS_5) ágyazhatók [6], [133]. Ha 5d-ben nullpor is jelen van, ami a polarizálatlan sugárzás magas frekvenciájú közelítése (geometriai optikai limit) és olyankor alkalmazható, valahányszor a sugárzás hullámhossza elhanyagolható a háttér görbületi sugarához képest, akkor a Friedmann bránok 5d Vaidya-Anti-de Sitter téridőbe (VAdS_5) ágyazhatók [134]. Abban az egyszerű esetben is, amikor SAdS_5 -be szimmetrikusan ágyazzuk a Friedmann bránt, a korai kozmológia jelentősen megváltozik a T_{ab} -ben kvadratikusan forrás miatt. Feltéve hogy az univerzum sugárzásdominálta a korai korszakban $a \propto \tau^{1/4}$, szemben a standard kozmológiai modellben megszokott $a \propto \tau^{1/2}$ -el [111]. A Friedmann brán SAdS_5 -be ágyazása esetén az 5d egyenletekről lecsatlakozó, és a bránon a kozmológiát leíró folytonossági egyenlet nem változik, de a Friedmann és a Raychaudhuri egyenletek igen. Ez a három egyenlet, ami általában független egymástól brán kozmológia esetén, nem lesznek függetlenek SAdS_5 -be ágyazáskor (de függetlenek lesznek például VAdS_5 -be való aszimmetrikus beágyazásnál). A Friedmann brán SAdS_5 -be való beágyazása esetén a teljes 5d Einstein egyenletek megoldása visszavezethető a folytonossági és a Raychaudhuri (vagy a Friedmann) egyenletnek a bránon történő megoldására.

Brán világokban sötét anyag nélkül megmagyarázhatóak a galaxis forgás-görbék, a gyenge lencsézés és a galaxis-halmazok röntgen sugárzási profilja [115]-[118].

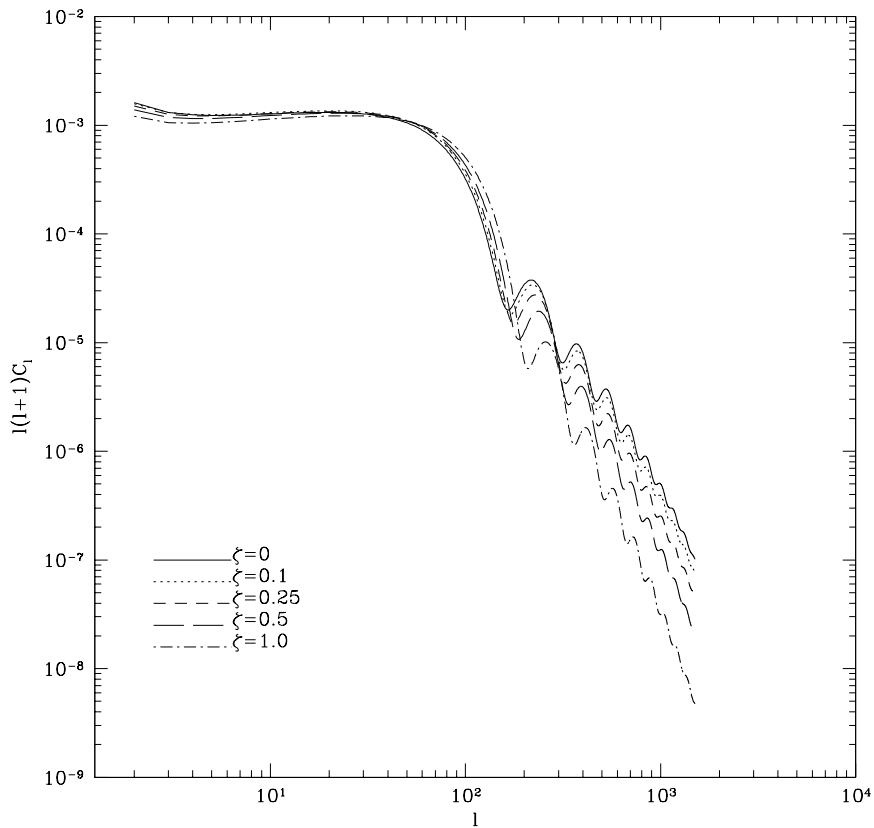
A Friedmann brán SAdS_5 -be ágyazásakor a bránon a kozmológiát leíró egyenletek lecsatlakozhatók az 5d egyenletekről. Lineáris perturbációszámításban ez már nem történik meg [3]. Szimmetrikus beágyazás esetén $\langle {}^{(4)}\mathcal{E}_{ab} \rangle = {}^{(4)}\mathcal{E}_{ab}$ egy $p = \rho/3$ állapotegyenletű ideális folyadék energia-impulzus tenzoraként jelenik meg a bránon a nem perturbált háttéren. Lineáris perturbációszámításban bránon záródó egyenlet csoportot csak abban az esetben kapunk, ha ${}^{(4)}\mathcal{E}_{ab}$ anizotróp nyomás része elhanyagolható, ami csak a nagy skálájú skalár perturbációk esetén történik meg [3], [135] annak köszönhetően, hogy a gradiens tagok ekkor elhanyagolhatók. Az 5d perturbációs egyenletek szeparálhatóak, amikor de Sitter, vagy Minkowski bránt ágyazunk szimmetrikusan AdS_5 téridőbe [136]-[141].

A kozmikus mikrohullámú háttérsugárzásban nagy szög skálákon a Sachs-Wolfe effektus a

domináns, amely brán-világokban ($\tilde{T}_{ab} = 0$ és a beágyazás szimmetrikus) [142]:

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{SW} = \left(\frac{\delta T}{T}\right)_{GRSW} - \frac{8\rho_r}{3\rho_{cdm}} S_{\mathcal{E}} - \kappa^2 a^2 \delta\pi_{\mathcal{E}} + \frac{2\kappa^2}{a^{5/2}} \int a^{7/2} \delta\pi_{\mathcal{E}} da. \quad (1.83)$$

A jobboldal első tagja az általános relativitáselméletben ismert Sachs-Wolfe formula, míg a többi az ${}^{(4)}\mathcal{E}_{ab}$ perturbációja miatt jelenik meg. Az utolsó két tagban szereplő $\delta\pi_{\mathcal{E}}$ a ${}^{(4)}\mathcal{E}_{ab}$ tenzor 3d izotrópia felületekre vett projekciójának spur mentes (anizotróp nyomás rész) részének skalár perturbációját reprezentálja. A $\delta\pi_{\mathcal{E}}$ -ra nem létezik bránon zárt fejlődési egyenlet, ami megnehezíti a brán járulékok kiértékelését. Emiatt RS2 brán-világokban további közelítésektől mentes elméleti jóslata jelenleg nincs a CMB teljesítmény-spektrumnak. Tenzor anizotrópiákból származó CMB spektrum az RS2 modellben arra támaszkodik, hogy ${}^{(4)}\mathcal{E}_{ab}$ anizotróp nyomás része a bránon a standard anyaghoz hasonló viselkedést mutatva egy első közelítésben (elhanyagolva az oktopol és magasabb rendű Legendre momentumokat) kifejezhető a kungruencia menti nyírás tenzor segítségével. A kapott spektrumot az 1.14. ábra mutatja.



1.14. ábra. Az ábra a tenzor anizotrópiákból jósolt CMB spektrumot mutatja [143]. ζ dimenzió mentes paraméter, ami ${}^{(4)}\mathcal{E}_{ab}$ anizotróp nyomás részének a nyíráshoz való csatolását határozza meg. $\zeta = 0$ esetén a brán járulékok eltűnnek.

Csillagok gravitációs kollapszusa megváltozik az általános relativitáselmülethez képest. Az Oppenheimer-Snyder kollapszus során az összeomló nulla nyomású ideális folyadék (por) külső térideje nem lehet sztatikus [112], amikor a brán beágyazása szimmetrikus a magasabb dimenziós vákuum téridőbe. Az összeomló csillag külseje a bránon lehet sztatikus, ha a magasabb dimenziós téridő speciális null port tartalmaz [113]. Amikor a magasabb dimenziós téridő vákuum, de az összeomló ideális folyadék nyomása nem nulla, akkor szintén lehet sztatikus a külső régió a bránon [114]. Nagytömegű fekete lyukak kialakulása esetén az összeomló anyag

közel por viselkedése a horizonton való áthaladás után is tartható, míg kistömegű fekete lyukak esetén a létrejövő nagy feszültségek sötét energiává alakítják a csillag anyagot.

A Hulse-Taylor kettős pulzár (PSRB 1913+16 pulzár) megfigyelt periódusidejének csökkenése igen pontos tesztje a gravitációs elméleteknek. Az általános relativitáselmélet által megjósolt gravitációs hullámok igen pontosan annyi energiát visznek el a rendszerből, ami a megfigyelt periódusidő csökkenést okozza. 5d Minkowski téridőbe szimmetrikusan ágyazott Minkowski brán esetén a [144]-ben származtatott kvadrupol formula (ami a vezető rendű időegység alatti energia veszteséget adja) alapján azt találták, hogy a brán-elmélet jósolta periódusidő csökkenés jóval nagyobb annál, mint amit a megfigyelések még megengednének. Azonban realisztikus brán-világ modellben az 5d téridő nem Minkowski, mint ahogy az eredeti RS2 modellben sem az. AdS₅-be szimmetrikusan ágyazott Minkowski brán esetén a periódusidő csökkenés nem mutatott vezető rendű eltérést az általános relativitáselméletihez képest [145].

A brán modellekben a λ brán-feszültség szabad paraméterként jelenik meg, amelyre kísérleti megfigyelések segítségével kényszereket lehet adni. Alább ezeket a fontosabb kényszereket foglalom össze:

- A Newton törvénytől szubmilliméter skálán történő lehetséges eltérésre vonatkozó kísérletek [146] eredményeznek egy kényszert az 5d téridő karakterisztikus görbületi skálájára $l \lesssim 0.1$ mm. Ezt $c = 1 = \hbar$ egységekben kifejezve, kapjuk [110]

$$l_{\max} = 506.77 \text{ eV}^{-1} = 0.50677 \times 10^{12} \text{ GeV}^{-1}. \quad (1.84)$$

A 4-dimenziós csatolási konstans κ^2 és a 4-dimenziós gravitációs konstans G kapcsolata a 4-dimenziós Planck tömeggel M_P : $\kappa^2 = 8\pi G = 8\pi/M_P^2$, ahol $M_P \approx 10^{19} \text{ GeV}$. Az 5-dimenziós Planck tömeg definíciója $\tilde{\kappa}^2 = 8\pi/M_{(5)}^3$. Mivel $M_{(5)}$ függ mind M_P -től és az l karakterisztikus görbületi skálától ($M_{(5)}^3 = M_P^2/l$) [109], ezért [110]

$$M_{(5)\min} = 6.65 \times 10^8 \text{ GeV}. \quad (1.85)$$

Az extra dimenzió (ami a gravitáción keresztül elérhető) jelenléte miatt a brán-világ modellek megengedik, hogy az effektív 4-dimenziós Planck skála a bránon sokkal nagyobb legyen, mint az 5-dimenziós Planck skála. Az l és M_P ismerete ad egy alsó korlátot a brán-feszültségre a két-brán modellekben [108], [110]:

$$\lambda_{\min} = \frac{3M_P^2}{4\pi l^2} = 138.59 \text{ TeV}^4. \quad (1.86)$$

- A Big Bang Nukleoszintézis (BBN) szintén ad egy alsó korlátot a brán-feszültségre $\lambda \gtrsim 1 \text{ MeV}^4$ [147], de sokkal gyengébbet.
- Létezik egy asztrofizikai limit is λ -ra, amely nagyon érzékeny a brán neutron csillag állapot-egyenletére [148]. Konstans sűrűségű tipikus neutron csillagra ez a limit $\lambda > 5 \times 10^8 \text{ MeV}^4$, amely a két korábbi határ között van.
- Naprendszerben a fényelhajlásból vizsgálatából kapott legerősebb kényszer $\lambda \gtrsim 6.31 \times 10^{-3} \text{ MeV}^4$ [149].

2. fejezet

Randall-Sundrum 2-es típusú brán-világok

A fejezet az RS2 brán-világ modellre támaszkodó kutatásaimat mutatja be. Pontokba szedve:

- Az RS2 brán-világ modellekre kifejlesztett általános 3+1+1 kovariáns formalizmus (2.1. fejezet);
- Új brán megoldás levezetése (2.2. fejezet);
- 5d Birkhoff-tétel kiterjesztése (2.3. fejezet);
- Az 5d kozmológiai megoldásokban megjelenő 5d fekete lyukak párolgásának hatása a brán kozmológiai fejlődésére aszimmetrikus beágyazás mellett (2.4. fejezet);
- Sugárzó bránok luminozítás-vöröseltolódás relációja, és szupernóva adatokkal való tesztelése (2.5. fejezet).

2.1. A 3+1+1 gravitációs dinamika

A fejezet a [150], [151] cikkekben és a [152] konferencia kiadványban elért eredményeket foglalja össze. Ebben a fejezetben általánosítom az általános relativitáselméletben kidolgozott, kinematikai és gravito-elektro-mágneses mennyiségeket használó 3+1 kovariáns formalizmust [2], amit sikeresen alkalmaztak főként kozmológiai perturbációs számításokban (lásd pl. [153]-[162]).

A téridő 3+1 felbontását lokálisan egy u^a normált négyes sebesség vektormező határozza meg. A 4d metrika felbontása: $-u_a u_b + h_{ab}$, ahol h_{ab} az u^a négyes sebességgel mozgó megfigyelő nyugalmi terére vetítő projekciós tenzor. A kinematikai és a gravito-elektro-mágneses mennyiségek a négyes sebesség kovariáns deriváltjának, illetve a C_{abcd} Weyl tenzor irreducibilis részekre történő felbontásából származnak:

$$\begin{aligned} A_a &= h_a^b u^c \nabla_c u_b, \quad \Theta = h^{ab} \nabla_a u_b, \\ \omega_a &= \varepsilon_a^{bc} \nabla_b u_c, \quad \sigma_{ab} = h_{[a}^c h_{b]}^d \nabla_c u_d, \\ E_{ab} &= C_{cdef} h_{[a}^c u^d h_{b]}^e u^f, \quad H_{ab} = \varepsilon_{[a}^{cd} h_{b]}^e C_{cdef} u^f. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Itt ε_{abc} a 3d térfogat elem és a $\langle \rangle$ zárójel a tenzorok minden indexében a h_{ab} -vel való projektált, szimmetrizált és spurtalan részét jelöli. Az A_a gyorsulás vektor a gravitációs és az inerciális erők kombinált hatását méri. Amikor u^a integrálgörbéje geodetikus a 4d téridőben, akkor eltűnik. Felvéve lokálisan egy gömböt a négyesebességre merőleges 3d térben a pozitív (negatív) Θ expanzió a gömb térfogatának növekedését (csökkenését) okozza. A nem nulla σ_{ab} nyírás tenzor eltorzítja a gömb alakját, nyújtja, vagy összepréseli azt a σ_{ab} főtengelei mentén a gömb

térfogatának változatlansága mellett. Az ω_a örvény vektor pedig a gömb elfordulását eredményezi az iránya által kijelölt tengely körül, és a nagysága által meghatározott szögsebességgel. A Weyl tenzor E_{ab} elektromos és H_{ab} mágneses része a gravitáció nem lokális hatását írják le, rájuk az elektrodinamika elektromos és mágneses térerősségéhez hasonlóan hullámegyenletek származtathatók.

Ezt a formalizmust [3]-ban általánosították RS2 brán-világ modellekre, amikor a magasabb dimenziós téridő kozmológiai állandótól eltekintve nem tartalmaz anyagot és a brán beágyazása szimmetrikus. Az RS2 brán 3+1 kovariáns formalizmus azonban nem használja a magasabb dimenziós probléma teljes egyenletrendszerét. Ezért egyenletei általában nem alkotnak zárt rendszert. A záródás hiányát az (1.82) effektív Einstein-egyenlet jobboldalán megjelenő ${}^{(4)}\mathcal{E}_{ab}$ tenzornak a brán megfigyelő nyugalmi terére vetített, spurmentes részére (ami az 5d gravitáció nem lokális hatásának anizotróp nyomás járuléka) vonatkozó fejlődési egyenlet hiánya okozza.

Szintén létezik egy kanonikus változókat használó s+1+1 formalizmus [4], ahol az 5d téridőt 4d időszerű és 4d térszerű felületekkel fóliázták. Az ilyen téridő *duplán fóliázható*. A gravitációs szabadsági fokok a két 4d hiperfelület 3d térszerű metszetén tenzoriális, vektoriális és skalár mennyiségekkel írhatók le, amik gravitonokat, gravi-fotonokat és gravi-skalárokat jelentenek. Ezek a mennyiségek a tenzori, vektori és skalár projekciói a 4d térszerű hiperfelületen indukált metrikának, és ezen projekciók kanonikus konjugáltjainak. A formalizmus Hamilton-i leírását [5]-ben adták meg. A magasabb dimenziós téridő felbontását meghatározó időszerű, illetve térszerű vektorok örvénymentesek, emiatt a formalizmus nem alkalmazható általános perturbációk leírására.

Ebben a fejezetben kifejleszttek egy formalizmust, amely megadja a gravitációs dinamika összes evolúciós és kényszer egyenletét 3+1+1 kovariáns alakban, és nem ró ki semmilyen feltételt az 5d téridőre, illetve a brán beágyazására.

A 2.1.1.-2.1.4. alfejezetekben tárgyalom a téridő 3+1+1 felbontását, a kinematikai, a gravito-elektro-mágneses és az anyagi változók definícióit. A B.1. függelék a deriváltak kommutációs relációit tartalmazza. A 2.1.5. alfejezetben bevezetem a 3d lokális Riemann és Ricci tenzorokat, és felírom kapcsolatukat a kinematikai, gravito-elektro-mágneses, illetve anyagi változókkal.

A 2.1.6. alfejezet tartalmazza a teljes 3+1+1 kovariáns gravitációs dinamikát és a kényszereket. A kapcsolódó B.2. mellékletben a bázis megválasztásában hordozott mértékszabadsági fokokat vizsgálom meg, és megadom a releváns mennyiségek transzformációit az infinitezimális bázis változtatás során. Ezek alkalmazásai a lineáris perturbációszámításban megjelenő formulákat egyszerűsíthetik.

Figyelembe véve, hogy a brán 4d időszerű hiperfelület, a 2.1.7. alfejezetben megadom a Lanczos egyenlet és az Effektív Einstein egyenlet forrásainak felbontását. Ezután felírom az általános evolúciós és kényszer egyenleteket a bránon, amelyek a 2.1.6. alfejezet egyenleteinek bránon kiértékelt kombinációiból származnak. A bránegyenletek önmagukban nem alkotnak zárt rendszert. A 2.1.7-ben egy a korábban ismertnél általánosabb záródási feltétel kerül megfogalmazásra.

A 2.1.8. alfejezetben felsorolom az általános beágyazás esetén a legfontosabb kozmológiai egyenleteket ideális folyadékkal kitöltött Friedmann bránra. Ezek a Friedmann, a Raychaudhuri és az energia mérleg egyenletek, amiket összevetek a [163]-ban publikáltakkal. Ebben az alfejezetben szintén viszonyulok néhány homogén, de anizotróp bránt tartalmazó 5d megoldáshoz.

A 2.1.9. alfejezet néhány további megjegyzést tartalmaz.

Jelölések: Az u^a és n^a -ra merőleges 3d téren definiált mennyiségek nem hordoznak megkülönböztető jelzést, a 3d metrikát pedig h_{ab} jelöli. A 4d időszerű bránon definiált mennyiségek a 4d g_{ab} metrika kivételével egy ${}^{(4)}$ előindexet kaptak. Az 5d mennyiségek egy \sim megkülönböztető jelzéssel rendelkeznek. Ez alól kivétel az 5d energia-impulzus tenzor 3+1+1 felbontásában szereplő mennyiségek, amelyek szintén kaptak egy tilde megkülönböztető jelzést, pedig nem 5d mennyiségek. Az írott szimbólumok az 5d Weyl tenzor 3+1+1 felbontásában szereplő változókat jelentik. Amikor lehetséges az ugyanazon szimbólumok közül, amik az u^a időszerű, illetve az n^a térszerű vektormezőkhöz tartoznak, az utóbbiak egy $\hat{}$ jelzést hordoznak. Az f

menyiség brán két oldalán vett értékének átlagát $\langle f \rangle$ -el jelölöm, ugrását pedig Δf -el. A $\langle \rangle$ zárójel az absztrakt indexeken a tenzor minden indexében 3d térre (amelynek metrikája h_{ab}) vetített részének szimmetrikus nyom mentes részét jelöli. Az indexeken a $()$ és $[]$ zárójelek a szimmetrikus, illetve antiszimmetrikus részeket jelentik.

2.1.1. A téridő 3+1+1 felbontása

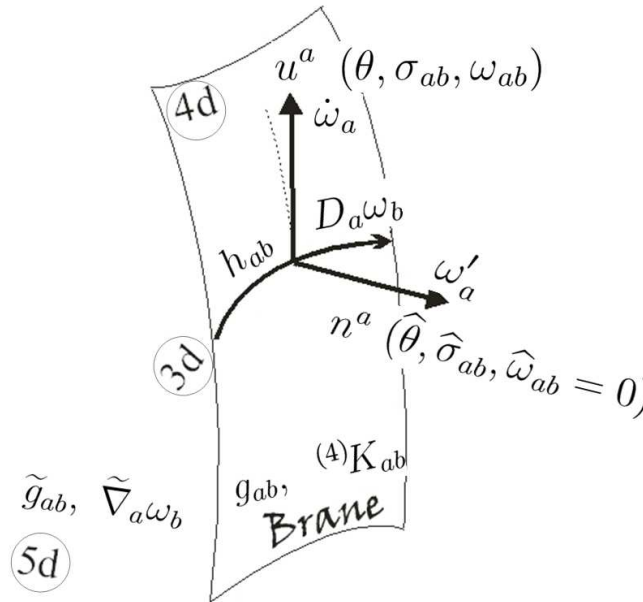
Legyen $u^a = dx^a/d\tau$ és $n^a = dx^a/dy$ idő, illetve térszerű vektormezők az 5d téridőben, ahol τ és y affin paraméterek a kijelölt nem null integrál görbéken. A vektorok normáltak $-u^a u_a = 1 = n^a n_a$, és merőlegesek egymásra $u^a n_a = 0$. Az 5d metrika felbontása

$$\tilde{g}_{ab} = n_a n_b + g_{ab} , \quad (2.2)$$

ahol

$$g_{ab} = -u_a u_b + h_{ab} , \quad (2.3)$$

a metrika a 4d időszerű, $y = \text{konstans}$ felületeken (az $y = 0$ -nál a brán helyezkedik el), aminek h_{ab} térbeli része eleget tesz az $u^a h_{ab} = n^a h_{ab} = 0$ relációknak. Az ε_{abc} a h_{ab} -hoz asszociált térfogat elem. Legyen n^a vektor merőleges a bránra, így u^a a bránon egy megfigyelő négyes sebességét adja (lásd 2.1. ábra).



2.1. ábra. Az 5d \tilde{g}_{ab} (ami $\tilde{\nabla}$ konnexitással kompatibilis) téridő 3+1+1 felbontásának elemei. Az n^a normálisú brán indukált metrikája $g_{ab} = \tilde{g}_{ab} - n_a n_b$ és külső görbülete ${}^{(4)}K_{ab} = g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c n_d$. A brán megfigyelők u^a négyessebessége definiálja a lokálisan rá merőleges 3d tereket, amelyek csak eltűnő ω_{ab} örvény esetén alkotnak hiperfelületeket. A Θ és σ_{ab} az expanszió, illetve a nyírás az u^a érintőjű görbe sereg mentén a bránon. Az n^a érintőjű görbesereget hasonlóan $\hat{\Theta}$, $\hat{\sigma}_{ab}$ és $\hat{\omega}_{ab}$ jellemzi, utóbbi a bránon eltűnik. (Az ábráért köszönet Gergely Árpád Lászlónak)

A leírásban az 5d $\tilde{\nabla}_i$ konnexitó projekcióihoz asszociált 3 típusú deriváltat használok. Pont, illetve vessző jelöli a kovariáns deriváltakat az u^a , és n^a integrál görbéi mentén, amíg D a h_{ab} -hoz asszociált 3d kovariáns derivált:

$$\dot{T}_{b..c} = u^a \tilde{\nabla}_a T_{b..c} , \quad (2.4)$$

$$T'_{b..c} = n^a \tilde{\nabla}_a T_{b..c} , \quad (2.5)$$

$$D_a T_{b..c} = h_a^d h_b^i \dots h_c^j \tilde{\nabla}_d T_{i..j} . \quad (2.6)$$

A D -derivált ugyanaz, mint általános relativitáselméletben, mivel a generált kovariáns derivált ott szintén a h_{ab} -hoz asszociált ($D_a h_{bc} = 0$). A fent definiált időderivált a skalároktól eltekintve különbözik a 3+1 kovariáns formalizmusban használttól n^a és u^a komponensű tagokban. Azonban az időderivált 3d térre projektált része (Fermi derivált) megegyezik az általános relativitáselméletben használttal.

2.1.2. Kinematikai mennyiségek

A kinematikai mennyiségek az u^a és n^a kovariáns deriváltjainak felbontásából származnak

$$\tilde{\nabla}_a u_b = -u_a A_b + \hat{K} u_a n_b + K n_a n_b + n_a K_b + L_a n_b + K_{ab}, \quad (2.7a)$$

$$\tilde{\nabla}_a n_b = n_a \hat{A}_b + K n_a u_b + \hat{K} u_a u_b - u_a \hat{K}_b + L_a u_b + \hat{K}_{ab}, \quad (2.7b)$$

ahol

$$\begin{aligned} A_a &= \dot{u}_{\langle a \rangle}, & \hat{A}_a &= n'_{\langle a \rangle}, \\ K_a &= u'_{\langle a \rangle}, & \hat{K}_a &= \dot{n}_{\langle a \rangle}, \\ K &= n^b u'_b, & \hat{K} &= u^b \dot{n}_b, \\ L_a &= h_a^c n^d \tilde{\nabla}_c u_d, \\ K_{ab} &= D_a u_b, & \hat{K}_{ab} &= D_a n_b. \end{aligned} \quad (2.8)$$

A kalap a mennyiségeken az n^a vektormezőhöz tartozó kinematikai változókat jelentik, megkülönböztetve a hasonló u^a -hoz tartozó mennyiségektől. A K_{ab} és \hat{K}_{ab} tenzoriális mennyiségek tovább bonthatók irreducibilis részekre:

$$K_{ab} = \frac{\Theta}{3} h_{ab} + \sigma_{ab} + \omega_{ab}, \quad (2.9)$$

$$\hat{K}_{ab} = \frac{\hat{\Theta}}{3} h_{ab} + \hat{\sigma}_{ab} + \hat{\omega}_{ab}, \quad (2.10)$$

ahol az u^a , és n^a vektorokhoz tartozó expanzió, nyírás és örvény tenzorok definíciói:

$$\begin{aligned} \Theta &= D^a u_a, & \omega_{ab} &= D_{[a} u_{b]}, & \sigma_{ab} &= D_{\langle a} u_{b \rangle}, \\ \hat{\Theta} &= D^a n_a, & \hat{\omega}_{ab} &= D_{[a} n_{b]}, & \hat{\sigma}_{ab} &= D_{\langle a} n_{b \rangle}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Az antiszimmetrikus ω_{ab} és $\hat{\omega}_{ab}$ 3d tenzorok kódolhatók az $\omega^a = \varepsilon^{abc} \omega_{bc}/2$ és $\hat{\omega}^a = \varepsilon^{abc} \hat{\omega}_{bc}/2$ örvény vektorokba. Amikor az n^a és u^a örvénymentesek $\omega_{ab} = \hat{\omega}_{ab} = 0$, a K_{ab} és \hat{K}_{ab} szimmetrikusak és a beágyazott 3d hiperfelület külső görbületi tenzorait jelentik. Az $\hat{\omega}_{ab} = 0$ az $y = 0$ -nál szükséges, de nem elégséges feltétel a brán létezéséhez. A brán 3+1-dimenziós időszerű hiperfelület csak akkor létezhet, ha normálisának magasabb dimenziós örvénye eltűnik, vagyis $q_{[a}^c q_{b]}^d \tilde{\nabla}_c n_d = 0$. A Frobenius tétel szerint ez elégséges feltétel is. Kinematikai mennyiségekre ez a következőt jelenti:

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_{ab}|_{y=0} &= 0, \\ L_a|_{y=0} &= -\hat{K}_a|_{y=0}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

A $\tilde{\nabla}_a u_b$ irreducibilis felbontása 3-skalárral (K , \hat{K} , Θ), 4 3-vektorral (A_a , K_a , L_a , ω_a) és egy szimmetrikus spurmentes 3-tenzorral (σ_{ab}) adható meg. A $\tilde{\nabla}_a n_b$ megfelelő irreducibilis felbontását szintén 3 skalár (\hat{K} , K , $\hat{\Theta}$), 4 3-vektor (\hat{A}_a , \hat{K}_a , L_a , $\hat{\omega}_a$) és egy szimmetrikus 3-tenzor ($\hat{\sigma}_{ab}$) adja meg.

2.1.3. Gravito-elektro-mágneses mennyiségek

Az 5d téridő nem lokális gravitációs tulajdonságait az 5d Weyl tenzor írja le, amelynek fő irányai vezetnek egy olyan osztályozási rendszerhez, amely általánosítja az általános relativisztikus Petrov osztályozást [164]. Itt megadom a 3+1+1 felbontását¹ a \tilde{C}_{abcd} 5d Weyl tenzornak:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \tilde{C}_{abcd} n^a u^b n^c u^d, \\
\mathcal{H}_k &= \frac{1}{2} \varepsilon_k^{ab} \tilde{C}_{abcd} u^c n^d, \quad \mathcal{F}_{kl} = \tilde{C}_{abcd} h_{(k}^a u^b h_{l)}^c n^d, \\
\hat{\mathcal{E}}_k &= \tilde{C}_{abcd} h_k^a n^b u^c n^d, \quad \mathcal{E}_k = \tilde{C}_{abcd} h_k^a u^b n^c u^d, \\
\hat{\mathcal{E}}_{kl} &= \tilde{C}_{abcd} h_{(k}^a n^b h_{l)}^c n^d, \quad \mathcal{E}_{kl} = \tilde{C}_{abcd} h_{(k}^a u^b h_{l)}^c u^d, \\
\hat{\mathcal{H}}_{kl} &= \frac{1}{2} \varepsilon_{(k}^{ab} h_{l)}^c \tilde{C}_{abcd} n^d, \quad \mathcal{H}_{kl} = \frac{1}{2} \varepsilon_{(k}^{ab} h_{l)}^c \tilde{C}_{abcd} u^d.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Minden fent definiált mennyiség spurmentes. A Weyl tenzor kifejezése a (2.13)-ban definiált mennyiségekkel

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_{abcd} &= -2 (\mathcal{E}_{d[a} h_{b]c} - \mathcal{E}_{c[a} h_{b]d}) + 2 (\hat{\mathcal{E}}_{d[a} h_{b]c} - \hat{\mathcal{E}}_{c[a} h_{b]d}) - \frac{2}{3} \mathcal{E} h_{c[a} h_{b]d} \\
&+ 2 (\varepsilon_{cd} {}^i \hat{\mathcal{H}}_{i[a} n_{b]} + \varepsilon_{ab} {}^i \hat{\mathcal{H}}_{i[c} n_{d]}) - 2 (\varepsilon_{cd} {}^i \mathcal{H}_{i[a} u_{b]} + \varepsilon_{ab} {}^i \mathcal{H}_{i[c} u_{d]}) \\
&+ 2 (n_c n_{[a} \hat{\mathcal{E}}_{b]d} - n_d n_{[a} \hat{\mathcal{E}}_{b]c}) + 2 (u_c u_{[a} \mathcal{E}_{b]d} - u_d u_{[a} \mathcal{E}_{b]c}) \\
&- 2 (u_c n_{[a} \mathcal{F}_{b]d} - u_d n_{[a} \mathcal{F}_{b]c} + n_c u_{[a} \mathcal{F}_{b]d} - n_d u_{[a} \mathcal{F}_{b]c}) \\
&- (n_{[c} u_{a]} \varepsilon_{bdk} + u_{[c} n_{b]} \varepsilon_{adk}) \mathcal{H}^k - (u_{[d} n_{a]} \varepsilon_{bck} + n_{[d} u_{b]} \varepsilon_{ack}) \mathcal{H}^k \\
&- 2 (u_{[c} n_{d]} \varepsilon_{abk} + u_{[a} n_{b]} \varepsilon_{cdk}) \mathcal{H}^k - 2 (\mathcal{E}_{[a} h_{b][c} n_{d]} + \mathcal{E}_{[c} h_{d][a} n_{b]}) \\
&- 2 (\hat{\mathcal{E}}_{[a} h_{b][c} u_{d]} + \hat{\mathcal{E}}_{[c} h_{d][a} u_{b]}) + 4 \mathcal{E} u_{[a} n_{b]} u_{[c} n_{d]} \\
&- 2 (n_c u_d n_{[a} \hat{\mathcal{E}}_{b]} - u_c n_d n_{[a} \hat{\mathcal{E}}_{b]} + n_a u_b n_{[c} \hat{\mathcal{E}}_{d]} - u_a n_b n_{[c} \hat{\mathcal{E}}_{d]}) \\
&+ 2 (u_c n_d u_{[a} \mathcal{E}_{b]} - n_c u_d u_{[a} \mathcal{E}_{b]} + u_a n_b u_{[c} \mathcal{E}_{d]} - n_a u_b u_{[c} \mathcal{E}_{d]}) \\
&- \frac{2}{3} \mathcal{E} (n_d n_{[a} h_{b]c} - n_c n_{[a} h_{b]d}) + \frac{2}{3} \mathcal{E} (u_d u_{[a} h_{b]c} - u_c u_{[a} h_{b]d}).
\end{aligned} \tag{2.14}$$

A (2.14) egyenlet általánosítja az általános relativisztikus C_{abcd} 4d Weyl tenzor 3+1 kovariáns felbontását. Az \mathcal{E}_{kl} és \mathcal{H}_{kl} mennyiségek kapcsolata az általános relativitáselméletbeli E_{kl} elektromos és H_{kl} mágneses mennyiségekkel:

$$\mathcal{E}_{ab} = E_{ab} + \frac{1}{2} \hat{\mathcal{E}}_{ab} - \frac{1}{2} \left(\hat{K} + \frac{\hat{\Theta}}{3} \right) \hat{\sigma}_{ab} + \frac{1}{2} \hat{\sigma}_{c\langle a} \hat{\sigma}_{b\rangle}^c + \frac{1}{2} \hat{K}_{\langle a} \hat{K}_{b\rangle}, \tag{2.15}$$

$$\mathcal{H}_{ab} = H_{ab} - \varepsilon_{\langle a} {}^{cd} \hat{\sigma}_{b\rangle c} \hat{K}_d. \tag{2.16}$$

Itt kihasználtam, hogy $q_{[a}^c q_{b]}^d \tilde{\nabla}_c n_d = 0$ a bránon.

2.1.4. Az energia-impulzus tenzor felbontása

Az 5d gravitációs dinamikát az Einstein egyenlet írja le

$$\tilde{G}_{ab} = -\tilde{\Lambda} \tilde{g}_{ab} + \tilde{\kappa}^2 \left[\tilde{T}_{ab} + \tau_{ab} \delta(y) \right], \tag{2.17}$$

¹A Weyl tenzor $n+1$ felbontását [165]-ben adták meg.

ahol $\tilde{\kappa}^2$ jelöli az 5d csatolási állandót. A gravitáció forrásául a $\tilde{\Lambda}$ 5d kozmológiai állandó, a reguláris 5d energia-impulzus tenzor \tilde{T}_{ab} és a brán tartójú

$$\tau_{ab} = -\lambda g_{ab} + T_{ab} \quad (2.18)$$

disztribucionális rész szolgál. Itt λ a brán-feszültség és T_{ab} a standard modell anyagi mezőit jelenti a bránon. A T_{ab} tenzor felbontása egy u^a négyes sebességgel mozgó brán megfigyelő szemszögéből:

$$T_{ab} = \rho u_a u_b + q_{(a} u_{b)} + p h_{ab} + \pi_{ab} . \quad (2.19)$$

A ρ , q_a , p és π_{ab} mennyiségek az energiasűrűség, az energiaáram vektor, az izotróp nyomás, és az anizotróp szimmetrikus spur-mentes nyomás tenzor.

Az 5d reguláris energia-impulzus tenzor u^a és n^a szerinti felbontása:

$$\tilde{T}_{ab} = \tilde{\rho} u_a u_b + 2\tilde{q}_{(a} u_{b)} + 2\tilde{q} u_{(a} n_{b)} + \tilde{p} h_{ab} + \tilde{\pi} n_a n_b + 2\tilde{\pi}_{(a} n_{b)} + \tilde{\pi}_{ab} , \quad (2.20)$$

ahol $\tilde{\rho}$ az u^a -hoz tartozó energiasűrűség, \tilde{p} az izotróp nyomás, \tilde{q}_a és \tilde{q} impulzus sűrűségek a 3d téren, illetve az n^a irányban. A $\tilde{\pi}$, $\tilde{\pi}_a$ és a szimmetrikus spur-mentes $\tilde{\pi}_{ab}$ 3-tenzor kapcsolatban állnak a magasabb dimenziós anizotróp nyomás tenzor skalár, vektor és tenzor projekcióival. A 4d anizotróp nyomás tenzor kifejezése

$$\frac{3(\tilde{\pi} - \tilde{p})}{4} n_a n_b + 2\tilde{\pi}_{(a} n_{b)} + \frac{\tilde{p} - \tilde{\pi}}{4} h_{ab} + \tilde{\pi}_{ab} . \quad (2.21)$$

A formalizmusban használt deriváltak kommutációs relációi a B.1 mellékletben találhatók.

2.1.5. A Gauss egyenlet és kontrakciói

Örvények jelenlétében az u^a és n^a vektorokra merőleges tér lokális 3d \mathcal{R}_{abcd} görbületét az alábbi formulával definiálom:

$$D_{[a} D_{b]} V_c - \omega_{ab} \dot{V}_{(c)} + \hat{\omega}_{ab} V'_{(c)} = \frac{1}{2} \mathcal{R}_{abcd} V^d , \quad (2.22)$$

ami adja, hogy

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{abcd} = & h_a^i h_b^j h_c^k h_d^l \tilde{R}_{ijkl} - (D_a u_c) (D_b u_d) + (D_a u_d) (D_b u_c) \\ & + (D_a n_c) (D_b n_d) - (D_a n_d) (D_b n_c) . \end{aligned} \quad (2.23)$$

Ez természetes általánosítása az általános relativitáselméletben használt definíciónak [2], [162], [166] és [167]. A kinematikai, a gravito-elektro-mágneses és az anyagi mennyiségek definícióit alkalmazva kapható:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{abcd} = & \left[-\frac{2}{3} (\Theta^2 - \hat{\Theta}^2) - \mathcal{E} + \tilde{\Lambda} + \tilde{\kappa}^2 (\tilde{\rho} + \tilde{p} - \tilde{\pi}) \right] \frac{h_{c[a} h_{b]d}}{3} \\ & - 2 (\mathcal{E}_{d[a} h_{b]c} - \mathcal{E}_{c[a} h_{b]d}) + 2 (\hat{\mathcal{E}}_{d[a} h_{b]c} - \hat{\mathcal{E}}_{c[a} h_{b]d}) - \frac{2\tilde{\kappa}^2}{3} (h_{d[a} \tilde{\pi}_{b]c} - h_{c[a} \tilde{\pi}_{b]d}) \\ & - \frac{2\Theta}{3} [(\sigma_{a[c} + \omega_{a[c} h_{d]b} + (\sigma_{b[d} + \omega_{b[d} h_{c]a})] - 2 (\sigma_{a[c} + \omega_{a[c} (\sigma_{d]b} - \omega_{d]b}) \\ & + \frac{2\hat{\Theta}}{3} [(\hat{\sigma}_{a[c} + \hat{\omega}_{a[c} h_{d]b} + (\hat{\sigma}_{b[d} + \hat{\omega}_{b[d} h_{c]a})] + 2 (\hat{\sigma}_{a[c} + \hat{\omega}_{a[c} (\hat{\sigma}_{d]b} - \hat{\omega}_{d]b}) . \end{aligned} \quad (2.24)$$

A lokális 3-Ricci tenzor és a Ricci skalár:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{ac} &= h^{bd}\mathcal{R}_{abcd} = \left[-\frac{2}{3} \left(\Theta^2 - \widehat{\Theta}^2 \right) - 2\mathcal{E} + \widetilde{\Lambda} + \widetilde{\kappa}^2 (\widetilde{\rho} + \widetilde{p} - \widetilde{\pi}) \right] \frac{h_{ac}}{3} \\
&+ \mathcal{E}_{ac} - \widehat{\mathcal{E}}_{ac} + \frac{\widetilde{\kappa}^2}{3} \widetilde{\pi}_{ac} - \frac{2\Theta}{3} (\sigma_{ac} + \omega_{ac}) + \frac{2\widehat{\Theta}}{3} (\widehat{\sigma}_{ac} + \widehat{\omega}_{ac}) \\
&+ \sigma_{ab}\sigma_c{}^b - \omega_b\omega^b h_{ac} + \omega_a\omega_c - 2\sigma_{[a}{}^b\omega_{c]b} \\
&- \widehat{\sigma}_{ab}\widehat{\sigma}_c{}^b + \widehat{\omega}_b\widehat{\omega}^b h_{ac} - \widehat{\omega}_a\widehat{\omega}_c + 2\widehat{\sigma}_{[a}{}^b\widehat{\omega}_{c]b} ,
\end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} &= h^{ac}\mathcal{R}_{ac} = -2\mathcal{E} + \widetilde{\Lambda} + \widetilde{\kappa}^2 (\widetilde{\rho} + \widetilde{p} - \widetilde{\pi}) - \frac{2}{3} \left(\Theta^2 - \widehat{\Theta}^2 \right) \\
&- 2\omega_a\omega^a + \sigma_{ab}\sigma^{ab} + 2\widehat{\omega}_a\widehat{\omega}^a - \widehat{\sigma}_{ab}\widehat{\sigma}^{ab} .
\end{aligned} \tag{2.26}$$

A (2.26) egyenlet az általánosított Friedmann egyenletet adja az 5d téridőben speciális szimmetriák esetén (az általános relativisztikus esetet lásd például [2], [166] és [167]-ben).

2.1.6. 3+1+1 kovariáns dinamika és kényszerek

A kinematikai és a gravito-elektro-mágneses mennyiségekre vonatkozó 3+1+1 kovariáns evolúciós és kényszer egyenletek teljes rendszere az u^a , illetve n^a vektorokra alkalmazott Ricci azonosságokból (ami a $\widetilde{\nabla}_{[a}\widetilde{\nabla}_{b]}u_c = \widetilde{R}_{abcd}u^d$ -t jelenti u^a -ra) és az 5d Bianchi azonosságokból származik. Ebben az alfejezetben megadott egyenletek a brán kivételével mindenütt érvényesek, a brán határain is. A brán határain azonban a (2.12) egyenletek határfeltételeket adnak az L_a , \widehat{K}_a és $\widehat{\omega}_a$ kinematikai mennyiségekre. A disztribucionális brán energia-impulzus tenzor hatását a 2.1.7. alfejezetben veszem figyelembe, ami további határfeltételeket fog jelenteni a \widehat{K} , $\widehat{\Theta}$, \widehat{K}_a és $\widehat{\sigma}_{ab}$ kinematikai mennyiségekre. A következőkben a Ricci és a Bianchi azonosságokból származó független egyenleteket adom meg. A B.2. mellékletben a változók lineáris bázis változtatás során fellépő transzformációs szabályait listázom.

Ricci identities

Az u^a -ra alkalmazott Ricci azonosságokból származó egyenletek:

$$\begin{aligned}
0 &= \dot{K} + \widehat{K}' + \widehat{A}_a A^a + K^2 - \widehat{K}^2 + L_a K^a - \widehat{K}_a K^a - L_a \widehat{K}^a \\
&+ \mathcal{E} - \frac{\widetilde{\Lambda}}{6} + \frac{\widetilde{\kappa}^2}{6} (\widetilde{\rho} - \widetilde{\pi} + 3\widetilde{p}) ,
\end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \dot{\Theta} - D^a A_a + \frac{\Theta^2}{3} + \widehat{\Theta}\widehat{K} - A^a A_a - 2\omega_a\omega^a + \sigma_{ab}\sigma^{ab} - \mathcal{E} \\
&+ \left(\widehat{K}^a K_a + K^a L_a + L^a \widehat{K}_a \right) - \frac{\widetilde{\Lambda}}{2} + \frac{\widetilde{\kappa}^2}{2} (\widetilde{\rho} + \widetilde{\pi} + \widetilde{p}) ,
\end{aligned} \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \dot{K}_{\langle a} - A'_{\langle a} + \left(K + \frac{\Theta}{3} \right) K_a + \left(K - \frac{\Theta}{3} \right) \widehat{K}_a + \mathcal{E}_a \\
&+ \widehat{K} \left(\widehat{A}_a + A_a \right) + (\omega_{ba} + \sigma_{ba}) \left(K^b - \widehat{K}^b \right) - \frac{\widetilde{\kappa}^2}{3} \widetilde{\pi}_a ,
\end{aligned} \tag{2.29}$$

$$\begin{aligned}
0 = & \dot{L}_{\langle a \rangle} + D_a \hat{K} + \left(K + \frac{\Theta}{3}\right) L_a + \left(\hat{K} + \frac{\hat{\Theta}}{3}\right) A_a + \left(K - \frac{\Theta}{3}\right) \hat{K}_a \\
& + (\hat{\omega}_{ab} + \hat{\sigma}_{ab}) A^b - (\omega_{ab} + \sigma_{ab}) (\hat{K}^b - L^b) + \mathcal{E}_a - \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} \tilde{\pi}_a, \quad (2.30)
\end{aligned}$$

$$0 = \dot{\omega}_{\langle a \rangle} - \frac{1}{2} \varepsilon_a^{cd} D_c A_d + \hat{K} \hat{\omega}_a + \frac{2\Theta}{3} \omega_a - \sigma_{ab} \omega^b + \frac{1}{2} \varepsilon_a^{cd} (K_c \hat{K}_d + K_c L_d + \hat{K}_c L_d), \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned}
0 = & \dot{\sigma}_{\langle ab \rangle} - D_{\langle a} A_{b \rangle} + \frac{2\Theta}{3} \sigma_{ab} + \hat{K} \hat{\sigma}_{ab} - A_{\langle a} A_{b \rangle} + K_{\langle a} L_{b \rangle} \\
& + \hat{K}_{\langle a} K_{b \rangle} + L_{\langle a} \hat{K}_{b \rangle} + \omega_{\langle a} \omega_{b \rangle} + \sigma_{c \langle a} \sigma_{b \rangle}^c + \mathcal{E}_{ab} - \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} \tilde{\pi}_{ab}, \quad (2.32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & \Theta' - D^a K_a - \left(K - \frac{\Theta}{3}\right) \hat{\Theta} + (K^a + L^a) \hat{A}_a \\
& - A^a (K_a - L_a) - 2\hat{\omega}_a \omega^a + \hat{\sigma}_{ab} \sigma^{ab} - \tilde{\kappa}^2 \tilde{q}, \quad (2.33)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & L'_{\langle a \rangle} - D_a K + \left(K - \frac{\Theta}{3}\right) \hat{A}_a - \left(\hat{K} - \frac{\hat{\Theta}}{3}\right) L_a + \left(\hat{K} + \frac{\hat{\Theta}}{3}\right) K_a \\
& + (\hat{\sigma}_{ab} + \hat{\omega}_{ab}) (K^b + L^b) - (\omega_{ab} + \sigma_{ab}) \hat{A}^b - \hat{\mathcal{E}}_a + \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} \tilde{q}_a, \quad (2.34)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & \omega'_{\langle k \rangle} - \frac{1}{2} \varepsilon_k^{ab} D_a K_b - \frac{1}{2} \varepsilon_k^{ab} (A_b + \hat{A}_b) (K_a - L_a) - \left(K - \frac{\Theta}{3}\right) \hat{\omega}_k \\
& + \frac{\hat{\Theta}}{3} \omega_k + \frac{1}{2} \varepsilon_k^{ab} \omega_a \hat{\omega}_b - \frac{1}{2} \hat{\sigma}_{ka} \omega^a - \frac{1}{2} \sigma_{ka} \hat{\omega}^a + \frac{1}{2} \varepsilon_k^{ab} \sigma_{cb} \hat{\sigma}_a^c - \frac{1}{2} \mathcal{H}_k, \quad (2.35)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & \sigma'_{\langle ab \rangle} - D_{\langle a} K_{b \rangle} - A_{\langle b} (K_{a \rangle} - L_{a \rangle}) + \hat{A}_{\langle b} (K_{a \rangle} + L_{a \rangle}) + \frac{\hat{\Theta}}{3} \sigma_{ab} \\
& - \left(K - \frac{\Theta}{3}\right) \hat{\sigma}_{ab} + \omega_{\langle a} \hat{\omega}_{b \rangle} + \omega_{c \langle a} \hat{\sigma}_{b \rangle}^c + \sigma_{\langle a}^d \hat{\omega}_{b \rangle d} + \sigma_{c \langle a} \hat{\sigma}_{b \rangle}^c + \mathcal{F}_{ab}, \quad (2.36)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & \varepsilon_k^{ab} D_a L_b + 2 \left(\hat{K} + \frac{\hat{\Theta}}{3}\right) \omega_k + 2 \left(K - \frac{\Theta}{3}\right) \hat{\omega}_k + \varepsilon_k^{ab} \omega_a \hat{\omega}_b \\
& - \hat{\sigma}_{ka} \omega^a + \sigma_{ka} \hat{\omega}^a - \varepsilon_k^{ab} \sigma_{cb} \hat{\sigma}_a^c + \mathcal{H}_k, \quad (2.37)
\end{aligned}$$

$$0 = D^a \omega_a - A_a \omega^a + \hat{\omega}^a (K_a - L_a), \quad (2.38)$$

$$0 = D_{\langle c} \omega_{k \rangle} + \varepsilon_{ab \langle k} D^b \sigma_{c \rangle}^a + 2 A_{\langle c} \omega_{k \rangle} - 2 K_{\langle c} \hat{\omega}_{k \rangle} - L_{\langle c} \hat{\omega}_{k \rangle} + \varepsilon_{\langle k}^{ab} \hat{\sigma}_{c \rangle b} L_a + \mathcal{H}_{kc}, \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned}
0 = & D^b \sigma_{ab} + \varepsilon_a^{ck} D_c \omega_k - \frac{2}{3} D_a \Theta + \frac{2\hat{\Theta}}{3} L_a - \varepsilon_a^{ck} L_c \hat{\omega}_k \\
& + 2 \varepsilon_a^{ck} (A_c \omega_k - K_c \hat{\omega}_k) - \hat{\sigma}_{ab} L^b + \hat{\mathcal{E}}_a + \frac{2\tilde{\kappa}^2}{3} \tilde{q}_b. \quad (2.40)
\end{aligned}$$

Az általános relativitáselméletben, illetve az RS2 brán 3+1 kovariáns formalizmusban a (2.28), (2.31), (2.32), (2.38), (2.39) és (2.40) egyenleteknek van megfelelője. A (2.28) egyenlet a ma-

gasabb dimenzióra általánosított Raychaudhuri egyenlet. A (2.31) egyenlet az u^a vektor 3d örvényének evolúcióját adja. A baloldal első négy tagja az általános relativitáselméletben is megjelenik, az utolsó két tag pedig mutatja, hogy n^a örvénye örvényt okoz u^a -ban. A (2.32) egyenlet az u^a 3d nyírásának evolúcióját mutatja, míg (2.38), (2.39) és (2.40) kényszer egyenletek a 3d téren. Kapcsolat az általános relativitáselmélettel a (2.32) és (2.39) egyenletekkel csak akkor látszik, ha az y =konstans felületek hiperfelületek és alkalmazzuk (2.15)-(2.16)-ot.

Az n^a -ra alkalmazott Ricci azonosság a következő előzőektől független egyenleteket adja

$$0 = \dot{\hat{\Theta}} - D^a \hat{K}_a + \left(\hat{K} + \frac{\hat{\Theta}}{3} \right) \Theta - \left(\hat{K}^a - L^a \right) A_a + \hat{A}^a \left(\hat{K}_a + L_a \right) - 2\omega_a \hat{\omega}^a + \hat{\sigma}_{ab} \sigma^{ab} - \tilde{\kappa}^2 \tilde{q}, \quad (2.41)$$

$$0 = \dot{\hat{\omega}}_{\langle k \rangle} - \frac{1}{2} \varepsilon_k^{ab} D_a \hat{K}_b + \frac{1}{2} \varepsilon_k^{ab} \left(\hat{A}_b + A_b \right) \left(\hat{K}_a + L_a \right) + \left(\hat{K} + \frac{\hat{\Theta}}{3} \right) \omega_k + \frac{\Theta}{3} \hat{\omega}_k + \frac{1}{2} \varepsilon_k^{ab} \hat{\omega}_a \omega_b - \frac{1}{2} \hat{\sigma}_{ka} \omega^a - \frac{1}{2} \sigma_{ka} \hat{\omega}^a + \frac{1}{2} \varepsilon_k^{ab} \hat{\sigma}_{cb} \sigma_a^c + \frac{1}{2} \mathcal{H}_k, \quad (2.42)$$

$$0 = \dot{\hat{\sigma}}_{\langle ab \rangle} - D_{\langle a} \hat{K}_{b \rangle} + \hat{A}_{\langle b} \left(\hat{K}_{a \rangle} + L_{a \rangle} \right) - A_{\langle b} \left(\hat{K}_{a \rangle} - L_{a \rangle} \right) + \frac{\Theta}{3} \hat{\sigma}_{ab} + \left(\hat{K} + \frac{\hat{\Theta}}{3} \right) \sigma_{ab} + \omega_{\langle a} \hat{\omega}_{b \rangle} - \omega_{c \langle a} \hat{\sigma}_{b \rangle}^c - \sigma_{\langle a}^d \hat{\omega}_{b \rangle d} + \sigma_{c \langle a} \hat{\sigma}_{b \rangle}^c + \mathcal{F}_{ab}, \quad (2.43)$$

$$0 = \hat{K}'_{\langle a \rangle} - \dot{\hat{A}}_{\langle a \rangle} - \left(\hat{K} - \frac{\hat{\Theta}}{3} \right) \hat{K}_a - \left(\hat{K} + \frac{\hat{\Theta}}{3} \right) K_a - K \left(A_a + \hat{A}_a \right) + \left(\hat{\omega}_{ba} + \hat{\sigma}_{ba} \right) \left(\hat{K}^b - K^b \right) + \hat{\mathcal{E}}_a - \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} \tilde{q}_a, \quad (2.44)$$

$$0 = \hat{\Theta}' - D^a \hat{A}_a + \frac{\hat{\Theta}^2}{3} - \Theta K + \hat{A}^a \hat{A}_a - 2\hat{\omega}_a \hat{\omega}^a + \hat{\sigma}_{ab} \hat{\sigma}^{ab} + \mathcal{E} - \left(\hat{K}^a K_a - \hat{K}^a L_a - L^a K_a \right) + \frac{\tilde{\Lambda}}{2} + \frac{\tilde{\kappa}^2}{2} (\tilde{\pi} + \tilde{\rho} - \tilde{p}), \quad (2.45)$$

$$0 = \hat{\omega}'_{\langle a \rangle} - \frac{1}{2} \varepsilon_a^{cd} D_c \hat{A}_d - K \omega_a + \frac{2\hat{\Theta}}{3} \hat{\omega}_a - \hat{\sigma}_{ab} \hat{\omega}^b - \frac{1}{2} \varepsilon_a^{cd} \left(K_c \hat{K}_d + \hat{K}_c L_d + K_c L_d \right),$$

$$0 = \hat{\sigma}'_{\langle ab \rangle} - D_{\langle a} \hat{A}_{b \rangle} + \frac{2\hat{\Theta}}{3} \hat{\sigma}_{ab} - K \sigma_{ab} + \hat{A}_{\langle a} \hat{A}_{b \rangle} + \hat{K}_{\langle a} L_{b \rangle} - \hat{K}_{\langle a} K_{b \rangle} + L_{\langle a} K_{b \rangle} + \hat{\omega}_{\langle a} \hat{\omega}_{b \rangle} + \hat{\sigma}_{c \langle a} \hat{\sigma}_{b \rangle}^c + \hat{\mathcal{E}}_{ab} + \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} \tilde{\pi}_{ab}, \quad (2.46)$$

$$0 = D^b \hat{\sigma}_{ab} + \varepsilon_a^{ck} D_c \hat{\omega}_k - \frac{2}{3} D_a \hat{\Theta} + \frac{2\Theta}{3} L_a - \varepsilon_a^{ck} L_c \omega_k - 2\varepsilon_a^{ck} \left(\hat{A}_c \hat{\omega}_k - \hat{K}_c \omega_k \right) - \sigma_{ab} L^b - \mathcal{E}_a - \frac{2\tilde{\kappa}^2}{3} \tilde{\pi}_a, \quad (2.47)$$

$$0 = D^a \hat{\omega}_a + \hat{A}_a \hat{\omega}^a - \omega^a \left(\hat{K}_a + L_a \right) , \quad (2.48)$$

$$0 = D_{\langle c} \hat{\omega}_{k \rangle} + \varepsilon_{ab \langle k} D^b \hat{\sigma}_{c \rangle}^a - 2 \hat{A}_{\langle c} \hat{\omega}_{k \rangle} + 2 \hat{K}_{\langle c} \omega_{k \rangle} - L_{\langle c} \omega_{k \rangle} + \varepsilon_{\langle k}^{ab} \sigma_{c \rangle b} L_a + \hat{\mathcal{H}}_{kc} . \quad (2.49)$$

Az 5d anyag megmaradási egyenletei

A kétszer kontrahált 5d Bianchi azonosság eredményezi, hogy $\tilde{\nabla}^a \tilde{T}_{ab} = 0$, aminek projekciói u , n , és h -val:

$$0 = \dot{\tilde{\rho}} + \tilde{q}' + D^a \tilde{q}_a + \tilde{\rho} (K + \Theta) + K \tilde{\pi} + \Theta \tilde{p} + \tilde{\pi}^{ab} \sigma_{ab} - \tilde{q} (2 \hat{K} - \hat{\Theta}) + \tilde{q}^a (2 A_a - \hat{A}_a) + \tilde{\pi}^a (L_a + K_a) , \quad (2.50)$$

$$0 = \dot{\tilde{q}} + \tilde{\pi}' + D^a \tilde{\pi}_a + \tilde{\pi} (\hat{\Theta} - \hat{K}) - \hat{K} \tilde{\rho} - \hat{\Theta} \tilde{p} - \tilde{\pi}^{ab} \hat{\sigma}_{ab} + \tilde{q} (2K + \Theta) - \tilde{\pi}^a (2 \hat{A}_a - A_a) - \tilde{q}^a (\hat{K}_a - L_a) , \quad (2.51)$$

$$0 = \dot{\tilde{q}}_{\langle k \rangle} + \tilde{\pi}'_{\langle k \rangle} + D_k \tilde{p} + D^a \tilde{\pi}_{ak} + \frac{4 \hat{\Theta}}{3} \tilde{\pi}_k + \frac{4 \Theta}{3} \tilde{q}_k - \hat{K} \tilde{\pi}_k + K \tilde{q}_k + \tilde{\rho} A_k + \tilde{\pi} \hat{A}_k - \tilde{p} (\hat{A}_k - A_k) + \tilde{q}^a \omega_{ak} + \tilde{q}^a \sigma_{ak} + \tilde{\pi}^a \hat{\omega}_{ak} + \tilde{\pi}^a \hat{\sigma}_{ak} + \tilde{q} (\hat{K}_k + K_k) - \tilde{\pi}_{ak} (\hat{A}^a - A^a) . \quad (2.52)$$

Az első egyenlet a folytonossági egyenlet, amint az könnyen ellenőrizhető homogén és izotróp esetben ($\tilde{q} = \tilde{q}^a = \tilde{\pi}^a = \tilde{\pi}^{ab} = 0$ és $\Theta = 3H$) $K = 0$ -ra. A (2.50)-(2.52) az 5d anyagra vonatkozó hiányos fejlődési egyenletek, mivel nincs egyenlet \tilde{p} , $\tilde{\pi}$, $\tilde{\pi}_a$ és $\tilde{\pi}_{ab}$ nyomás tagokra.

Bianchi azonosságok

Az 5d Bianchi azonosság a kétszer kontrahált Bianchi azonosságtól következő független evolúciós és kényszer egyenleteket adja a gravito-elektro-mágneses mennyiségekre:

$$0 = \dot{\mathcal{E}}_{\langle k \rangle} + D^a \mathcal{F}_{ka} + \frac{\varepsilon_k^{ab}}{2} D_a \mathcal{H}_b - \mathcal{E}_{ka} (\hat{K}^a + L^a) - \hat{\mathcal{E}}_{ka} L^a - \left(\hat{K} + \frac{\hat{\Theta}}{3} \right) \hat{\mathcal{E}}_k + \frac{4}{3} \Theta \mathcal{E}_k + \frac{4 \mathcal{E}}{3} \hat{K}_k + \mathcal{F}_{ka} A^a - \frac{1}{2} (\sigma_{ka} + \omega_{ka}) \mathcal{E}^a - (\hat{\sigma}_{ka} - 2 \hat{\omega}_{ka}) \hat{\mathcal{E}}^a - 2 \mathcal{H}_{ka} \hat{\omega}^a - \hat{\mathcal{H}}_{ka} \omega^a + \varepsilon_k^{ab} \hat{\mathcal{H}}_{ca} \sigma_b^c - \frac{3}{2} \varepsilon_k^{ab} \mathcal{H}_a A_b + \frac{2 \tilde{\kappa}^2}{3} \dot{P}_{\langle k \rangle} + \frac{2 \tilde{\kappa}^2}{3} D_k \tilde{q} + \frac{2 \tilde{\kappa}^2}{3} (\tilde{\pi} - \tilde{p}) \hat{K}_k + \frac{2 \tilde{\kappa}^2}{3} (\tilde{\rho} + \tilde{\pi}) L_k - \frac{2 \tilde{\kappa}^2}{3} \left(\hat{K} + \frac{\hat{\Theta}}{3} \right) \tilde{q}_k - \frac{2 \tilde{\kappa}^2}{3} (\hat{\omega}_{ka} + \hat{\sigma}_{ka}) \tilde{q}^a - \frac{2 \tilde{\kappa}^2}{3} \tilde{\pi}_{ka} \hat{K}^a + \frac{2 \tilde{\kappa}^2}{3} (\omega_{ka} + \sigma_{ka}) \tilde{\pi}^a + \frac{2 \tilde{\kappa}^2 \Theta}{9} \tilde{\pi}_k + \frac{2 \tilde{\kappa}^2 \tilde{q}}{3} A_k , \quad (2.53)$$

$$0 = \dot{\mathcal{E}} - D^a \hat{\mathcal{E}}_a + \frac{4}{3} \Theta \mathcal{E} + \hat{\mathcal{E}}_{ab} \sigma^{ab} - \mathcal{F}_{ab} \hat{\sigma}^{ab} + 3 \mathcal{H}_a \hat{\omega}^a - \mathcal{E}_a (2 \hat{K}^a + L^a) - 2 \hat{\mathcal{E}}_a A^a - \frac{\tilde{\kappa}^2}{2} (\tilde{\rho} - \tilde{\pi} + \tilde{p}) - \frac{2 \tilde{\kappa}^2}{3} D^a \tilde{q}_a - \frac{2 \tilde{\kappa}^2}{3} \Theta (\tilde{\rho} + \tilde{p}) - \frac{2 \tilde{\kappa}^2}{3} \hat{\Theta} \tilde{q} - \frac{4 \tilde{\kappa}^2}{3} \tilde{q}_a A^a - \frac{2 \tilde{\kappa}^2}{3} \tilde{\pi}_a (2 \hat{K}^a + L^a) - \frac{2 \tilde{\kappa}^2}{3} \tilde{\pi}_{ab} \sigma^{ab} , \quad (2.54)$$

$$0 = \dot{\mathcal{H}}_{\langle k \rangle} - \varepsilon_k^{ab} D_a \mathcal{E}_b - \hat{\mathcal{H}}_{ka} A^a + \mathcal{H}_{ka} \hat{K}^a - \mathcal{E}_{ka} \hat{\omega}^a - \frac{8 \mathcal{E}}{3} \hat{\omega}_k + \mathcal{F}_{ka} \omega^a + \varepsilon_k^{ab} \mathcal{F}_{ac} \sigma_b^c + \Theta \mathcal{H}_k$$

$$\begin{aligned}
& +\frac{3}{2}(\omega_{ka}-\sigma_{ka})\mathcal{H}^a+\varepsilon_k{}^{ab}\left[\frac{3}{2}\left(\widehat{\mathcal{E}}_a\widehat{K}_b-A_a\mathcal{E}_b\right)-L_a\widehat{\mathcal{E}}_b\right]-\varepsilon_k{}^{ab}\mathcal{E}_{ac}\widehat{\sigma}_b{}^c+\frac{\widetilde{\kappa}^2}{3}\varepsilon_k{}^{ab}D_a\widetilde{\pi}_b \\
& -\frac{\widetilde{\kappa}^2}{3}\varepsilon_k{}^{ab}\widetilde{q}_aL_b+\frac{2\widetilde{\kappa}^2}{3}\widetilde{q}\omega_k+\frac{\widetilde{\kappa}^2}{3}\varepsilon_k{}^{ab}\widetilde{\pi}_{ac}\widehat{\sigma}_b{}^c+\frac{2\widetilde{\kappa}^2}{3}(\widetilde{\pi}-\widetilde{p})\widehat{\omega}_k+\frac{\widetilde{\kappa}^2}{3}\widetilde{\pi}_{ka}\widehat{\omega}^a, \tag{2.55}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & \dot{\widehat{\mathcal{E}}}_{\langle k\rangle}+\mathcal{E}'_{\langle k\rangle}-D_k\mathcal{E}-\mathcal{E}_{ka}\widehat{A}^a-\widehat{\mathcal{E}}_{ka}A^a+K\widehat{\mathcal{E}}_k-\widehat{K}\mathcal{E}_k+\frac{2}{3}\left(\Theta\widehat{\mathcal{E}}_k+\widehat{\Theta}\mathcal{E}_k\right) \\
& +2(\omega_{ka}+\sigma_{ka})\widehat{\mathcal{E}}^a+2(\widehat{\omega}_{ka}+\widehat{\sigma}_{ka})\mathcal{E}^a+\mathcal{F}_{ka}\left(K^a+\widehat{K}^a\right)+\frac{3}{2}\varepsilon_{kab}\mathcal{H}^a\left(\widehat{K}^b-K^b\right) \\
& -\frac{4}{3}\mathcal{E}\left(A_k-\widehat{A}_k\right)-\frac{\widetilde{\kappa}^2}{6}D_k(\widetilde{\rho}-\widetilde{\pi}+\widetilde{p})+\frac{\widetilde{\kappa}^2}{3}D^a\widetilde{\pi}_{ak} \\
& +\frac{2\widetilde{\kappa}^2}{9}\left(\widehat{\Theta}\widetilde{\pi}_k+\Theta\widetilde{q}_k\right)-\frac{\widetilde{\kappa}^2}{3}\left[(3\widehat{\omega}_{ka}+\widehat{\sigma}_{ka})\widetilde{\pi}^a+(3\omega_{ka}+\sigma_{ka})\widetilde{q}^a\right], \tag{2.56}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & \dot{\mathcal{E}}_{\langle kj\rangle}-\mathcal{F}'_{\langle kj\rangle}-\varepsilon_{ab\langle k}D^a\mathcal{H}_{j\rangle}{}^b-\frac{1}{2}D_{\langle k}\widehat{\mathcal{E}}_{j\rangle}+\left(K-\frac{\Theta}{3}\right)\widehat{\mathcal{E}}_{kj}+(K+\Theta)\mathcal{E}_{kj} \\
& +\frac{2\mathcal{E}}{3}\sigma_{kj}+2\left(\widehat{K}-\frac{\widehat{\Theta}}{3}\right)\mathcal{F}_{kj}-\widehat{\mathcal{E}}_{\langle k}\left(A_{j\rangle}-\frac{3}{2}\widehat{A}_{j\rangle}\right)+\frac{1}{2}\mathcal{E}_{\langle k}\left(4\widehat{K}_{j\rangle}-L_{j\rangle}-3K_{k\rangle}\right) \\
& +\frac{3}{2}\mathcal{H}_{\langle k}\widehat{\omega}_{j\rangle}+2\widehat{\mathcal{E}}_{a\langle k}\sigma_{j\rangle}{}^a+\frac{3}{2}\varepsilon_{\langle j}{}^{ab}\widehat{\sigma}_{k\rangle a}\mathcal{H}_b+\mathcal{E}_{\langle k}{}^a(\omega_{j\rangle a}-3\sigma_{j\rangle a})-\mathcal{F}_{\langle j}{}^a(\widehat{\omega}_{k\rangle a}-\widehat{\sigma}_{k\rangle a}) \\
& +\varepsilon_{\langle k}{}^{ab}\mathcal{H}_{j\rangle a}\left(2A_b-\widehat{A}_b\right)-\varepsilon_{\langle k}{}^{ab}\widehat{\mathcal{H}}_{j\rangle a}(K_b+L_b)+\frac{2\widetilde{\kappa}^2}{3}\dot{\widetilde{\pi}}_{\langle kj\rangle}+\frac{2\widetilde{\kappa}^2}{3}D_{\langle k}\widetilde{q}_{j\rangle}+\frac{2\widetilde{\kappa}^2}{9}\Theta\widetilde{\pi}_{jk} \\
& +\frac{2\widetilde{\kappa}^2}{3}\widetilde{\pi}_{\langle k}\left(3\widehat{K}_{j\rangle}+L_{j\rangle}\right)+2\widetilde{\kappa}^2\widetilde{q}_{\langle k}A_{j\rangle}+\frac{2\widetilde{\kappa}^2}{3}\widetilde{q}\widehat{\sigma}_{jk}+\frac{2\widetilde{\kappa}^2}{3}(\widetilde{\rho}+\widetilde{p})\sigma_{jk}+\frac{2\widetilde{\kappa}^2}{3}\widetilde{\pi}_{\langle j}{}^a(\omega_{k\rangle a}+\sigma_{k\rangle a}) \tag{2.57}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & \dot{\mathcal{F}}_{\langle kj\rangle}-\mathcal{E}'_{\langle kj\rangle}+D_{\langle k}\mathcal{E}_{j\rangle}+\left(\widehat{K}-\frac{\widehat{\Theta}}{3}\right)\mathcal{E}_{kj}+\widehat{K}\widehat{\mathcal{E}}_{kj}+\frac{4\mathcal{E}}{3}\widehat{\sigma}_{kj}+\left(2K+\frac{\Theta}{3}\right)\mathcal{F}_{kj} \\
& -\frac{3}{2}\mathcal{H}_{\langle k}\omega_{j\rangle}-\widehat{\mathcal{E}}_{\langle j}\left(\frac{3}{2}\widehat{K}_{k\rangle}-L_{k\rangle}-K_{k\rangle}\right)+\mathcal{F}_{\langle j}{}^a(\omega_{k\rangle a}+\sigma_{k\rangle a})-2\mathcal{E}_{\langle k}\left(\widehat{A}_{j\rangle}-\frac{3}{4}A_{j\rangle}\right) \\
& -\mathcal{E}_{\langle j}{}^a(\widehat{\omega}_{k\rangle a}+\widehat{\sigma}_{k\rangle a})+\varepsilon_{\langle k}{}^{ab}\mathcal{H}_{j\rangle a}\left(\widehat{K}_b-2K_b\right)+\varepsilon_{\langle j}{}^{ab}\widehat{\mathcal{H}}_{k\rangle a}A_b+\frac{3}{2}\varepsilon_{\langle j}{}^{ab}\sigma_{k\rangle a}\mathcal{H}_b \\
& +\frac{\widetilde{\kappa}^2}{3}\widetilde{\pi}'_{\langle kj\rangle}-\frac{\widetilde{\kappa}^2}{3}D_{\langle k}\widetilde{\pi}_{j\rangle}+\frac{\widetilde{\kappa}^2}{9}\widehat{\Theta}\widetilde{\pi}_{kj}-\frac{\widetilde{\kappa}^2}{3}(\widetilde{\pi}-\widetilde{p})\widehat{\sigma}_{kj}-\frac{\widetilde{\kappa}^2}{3}\widetilde{q}\sigma_{kj} \\
& +\frac{\widetilde{\kappa}^2}{3}\widetilde{\pi}_{\langle j}{}^a(\widehat{\omega}_{k\rangle a}+\widehat{\sigma}_{k\rangle a})+\frac{2\widetilde{\kappa}^2}{3}\widetilde{\pi}_{\langle j}\widehat{A}_{k\rangle}+\frac{\widetilde{\kappa}^2}{3}\widetilde{q}_j(2K_{k\rangle}-L_{k\rangle}), \tag{2.58}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & \dot{\widehat{\mathcal{E}}}_{\langle kj\rangle}-\mathcal{F}'_{\langle kj\rangle}-D_{\langle k}\widehat{\mathcal{E}}_{j\rangle}+\left(K+\frac{\Theta}{3}\right)\widehat{\mathcal{E}}_{kj}+K\mathcal{E}_{kj}+\frac{4\mathcal{E}}{3}\sigma_{kj}+\left(2\widehat{K}-\frac{\widehat{\Theta}}{3}\right)\mathcal{F}_{kj}-\frac{3}{2}\mathcal{H}_{\langle k}\widehat{\omega}_{j\rangle} \\
& -\mathcal{F}_{\langle j}{}^a(\widehat{\omega}_{k\rangle a}+\widehat{\sigma}_{k\rangle a})-\mathcal{E}_{\langle j}\left(\frac{3}{2}K_{k\rangle}+L_{k\rangle}-\widehat{K}_{k\rangle}\right)-2\widehat{\mathcal{E}}_{\langle k}\left(A_{j\rangle}-\frac{3}{4}\widehat{A}_{j\rangle}\right)+\widehat{\mathcal{E}}_{\langle j}{}^a(\omega_{k\rangle a}+\sigma_{k\rangle a}) \\
& -\varepsilon_{\langle k}{}^{ab}\widehat{\mathcal{H}}_{j\rangle a}(K_b-2\widehat{K}_b)-\varepsilon_{\langle j}{}^{ab}\mathcal{H}_{k\rangle a}\widehat{A}_b+\frac{3}{2}\varepsilon_{\langle j}{}^{ab}\widehat{\sigma}_{k\rangle a}\mathcal{H}_b+\frac{\widetilde{\kappa}^2}{3}\dot{\widetilde{\pi}}_{\langle kj\rangle}+\frac{\widetilde{\kappa}^2}{3}D_{\langle k}\widetilde{q}_{j\rangle}+\frac{\widetilde{\kappa}^2}{3}(\widetilde{\rho}+\widetilde{p})\sigma_{kj} \\
& +\frac{\widetilde{\kappa}^2}{3}\widetilde{q}\widehat{\sigma}_{kj}+\frac{\widetilde{\kappa}^2}{9}\Theta\widetilde{\pi}_{kj}+\frac{2\widetilde{\kappa}^2}{3}\widetilde{q}_{\langle j}A_{k\rangle}+\frac{\widetilde{\kappa}^2}{3}\widetilde{\pi}_{\langle j}\left(2\widehat{K}_{k\rangle}+L_{k\rangle}\right)+\frac{\widetilde{\kappa}^2}{3}\widetilde{\pi}_{\langle j}{}^a(\omega_{k\rangle a}+\sigma_{k\rangle a}), \tag{2.59}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & \dot{\mathcal{H}}_{\langle kj \rangle} + \varepsilon_{ab\langle k} D^a \mathcal{E}_j{}^b + \widehat{K} \widehat{\mathcal{H}}_{kj} + \Theta \mathcal{H}_{kj} - \frac{3}{2} \mathcal{H}_{\langle k} \widehat{K}_{j \rangle} - \frac{3}{2} \widehat{\mathcal{E}}_{\langle j} \omega_k - (\omega_{a\langle k} + 3\sigma_{a\langle k}) \mathcal{H}_{j \rangle}^a \\
& + \varepsilon_{\langle k}{}^{ab} \mathcal{F}_{j \rangle a} \left(\widehat{K}_b + 2L_b \right) + \varepsilon_{\langle k}{}^{ab} \left(\widehat{\mathcal{E}}_{j \rangle a} - 2\mathcal{E}_{j \rangle a} \right) A_b - \frac{1}{2} \varepsilon_{\langle k}{}^{ab} \sigma_{j \rangle a} \widehat{\mathcal{E}}_b + \varepsilon_{\langle k}{}^{ab} \widehat{\sigma}_{j \rangle a} \mathcal{E}_b \\
& + 3\mathcal{E}_{\langle j} \widehat{\omega}_k - \frac{\widetilde{\kappa}^2}{3} \varepsilon_{ab\langle k} D^a \widetilde{\pi}_{j \rangle}^b - \widetilde{\kappa}^2 \left(\widetilde{q}_{\langle j} \omega_k + \widetilde{\pi}_{\langle j} \widehat{\omega}_k \right) - \frac{\widetilde{\kappa}^2}{3} \varepsilon_{\langle k}{}^{ab} \left(\sigma_{j \rangle a} \widetilde{q}_b + \widehat{\sigma}_{j \rangle a} \widetilde{\pi}_b \right) , \quad (2.60)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & \dot{\widehat{\mathcal{H}}}_{\langle kj \rangle} + \varepsilon_{ab\langle k} D^a \mathcal{F}_{j \rangle}^b - \frac{1}{2} D_{\langle j} \mathcal{H}_{k \rangle} + \left(\widehat{K} + \frac{\widehat{\Theta}}{3} \right) \mathcal{H}_{kj} + \frac{2\Theta}{3} \widehat{\mathcal{H}}_{kj} - 2\mathcal{H}_{a\langle k} \widehat{\sigma}_{j \rangle}^a \\
& + \widehat{\mathcal{H}}_{\langle j}{}^a (\omega_k)_a - \sigma_{k \rangle a} + \frac{3}{2} \mathcal{E}_{\langle j} \omega_k - 3\widehat{\omega}_{\langle k} \widehat{\mathcal{E}}_{j \rangle} - \varepsilon_{\langle k}{}^{ab} \mathcal{E}_{j \rangle a} \left(\widehat{K}_b - L_b \right) \\
& - \frac{3}{2} \mathcal{H}_{\langle k} A_{j \rangle} + \varepsilon_{\langle k}{}^{ab} \widehat{\mathcal{E}}_{j \rangle a} \left(2\widehat{K}_b + L_b \right) + \frac{3}{2} \varepsilon_{\langle k}{}^{ab} \sigma_{j \rangle a} \mathcal{E}_b - \varepsilon_{\langle k}{}^{ab} \mathcal{F}_{j \rangle a} A_b , \quad (2.61)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & \mathcal{E}' + D^a \mathcal{E}_a + \frac{4}{3} \widehat{\Theta} \mathcal{E} - 2\mathcal{E}_a \widehat{A}^a - \widehat{\mathcal{E}}_a (2K^a - L^a) + 3\omega_a \mathcal{H}^a + \mathcal{F}_{ab} \sigma^{ab} \\
& - \mathcal{E}_{ab} \widehat{\sigma}^{ab} - \frac{\widetilde{\kappa}^2}{2} (\widetilde{\rho} - \widetilde{\pi} + \widetilde{p})' + \frac{2\widetilde{\kappa}^2}{3} D^a \widetilde{\pi}_a + \frac{2\widetilde{\kappa}^2 \Theta}{3} \widetilde{q} \\
& - \frac{2\widetilde{\kappa}^2 \widehat{\Theta}}{3} (\widetilde{p} - \widetilde{\pi}) - \frac{4\widetilde{\kappa}^2}{3} \widetilde{\pi}_a \widehat{A}^a - \frac{2\widetilde{\kappa}^2}{3} \widetilde{q}_a (2K^a - L^a) - \frac{2\widetilde{\kappa}^2}{3} \widetilde{\pi}_{ab} \widehat{\sigma}^{ab} , \quad (2.62)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & \widehat{\mathcal{E}}'_{\langle k \rangle} - D^a \mathcal{F}_{ka} + \frac{1}{2} \varepsilon_k{}^{ab} D_a \mathcal{H}_b - \widehat{\mathcal{E}}_{ka} (K^a - L^a) + \mathcal{E}_{ka} L^a - \frac{1}{2} (\widehat{\sigma}_{ka} + \widehat{\omega}_{ka}) \widehat{\mathcal{E}}^a \\
& - (\sigma_{ka} - 2\omega_{ka}) \mathcal{E}^a + 2\widehat{\mathcal{H}}_{ka} \omega^a + \mathcal{H}_{ka} \widehat{\omega}^a + \mathcal{F}_{ka} \widehat{A}^a + \left(K - \frac{\Theta}{3} \right) \mathcal{E}_k - \frac{4\mathcal{E}}{3} K_k \\
& + \frac{4\widehat{\Theta}}{3} \widehat{\mathcal{E}}_k - \varepsilon_k{}^{ab} \mathcal{H}_{ca} \widehat{\sigma}_b{}^c + \frac{3}{2} \varepsilon_k{}^{ab} \mathcal{H}_a \widehat{A}_b + \frac{2\widetilde{\kappa}^2}{3} \widetilde{q}_{\langle k \rangle} - \frac{2\widetilde{\kappa}^2}{3} D_k \widetilde{q} \\
& + \frac{2\widetilde{\kappa}^2}{3} (\widetilde{\rho} + \widetilde{p}) K_k - \frac{2\widetilde{\kappa}^2}{3} (\widetilde{\pi} + \widetilde{\rho}) L_k + \frac{2\widetilde{\kappa}^2}{3} \left(K - \frac{\Theta}{3} \right) \widetilde{\pi}_k + \frac{2\widetilde{\kappa}^2 \widehat{\Theta}}{9} \widetilde{q}_k \\
& - \frac{2\widetilde{\kappa}^2}{3} (\omega_{ka} + \sigma_{ka}) \widetilde{\pi}^a + \frac{2\widetilde{\kappa}^2}{3} (\widehat{\omega}_{ka} + \widehat{\sigma}_{ka}) \widetilde{q}^a + \frac{2\widetilde{\kappa}^2 \widetilde{q}}{3} \widehat{A}_k + \frac{2\widetilde{\kappa}^2}{3} \widetilde{\pi}_{ka} K^a , \quad (2.63)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & \mathcal{H}'_{\langle k \rangle} + \varepsilon_k{}^{ab} D_a \widehat{\mathcal{E}}_b + \mathcal{H}_{ka} \widehat{A}^a - \widehat{\mathcal{H}}_{ka} K^a + \widehat{\mathcal{E}}_{ka} \omega^a - \mathcal{F}_{ka} \widehat{\omega}^a + \varepsilon_k{}^{ab} \widehat{\mathcal{E}}_{ac} \sigma_b{}^c - \varepsilon_k{}^{ab} \mathcal{F}_{ac} \widehat{\sigma}_b{}^c \\
& + \frac{3}{2} (\widehat{\omega}_{ka} - \widehat{\sigma}_{ka}) \mathcal{H}^a + \widehat{\Theta} \mathcal{H}_k - \frac{8\mathcal{E}}{3} \omega_k - \varepsilon_k{}^{ab} \left[\frac{3}{2} \widehat{A}_a \widehat{\mathcal{E}}_b - \frac{3}{2} \mathcal{E}_a K_b - L_a \mathcal{E}_b \right] - \frac{\widetilde{\kappa}^2 \varepsilon_k{}^{ab}}{3} D_a \widetilde{q}_b \\
& + \frac{\widetilde{\kappa}^2}{3} \varepsilon_k{}^{ab} \widetilde{\pi}_a L_b - \frac{2\widetilde{\kappa}^2 \widetilde{q}}{3} \widehat{\omega}_k + \frac{\widetilde{\kappa}^2}{3} \varepsilon_k{}^{ab} \widetilde{\pi}_{ac} \sigma_b{}^c - \frac{2\widetilde{\kappa}^2}{3} (\widetilde{\rho} + \widetilde{p}) \omega_k + \frac{\widetilde{\kappa}^2}{3} \widetilde{\pi}_{ka} \omega^a , \quad (2.64)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & \mathcal{E}'_{\langle k \rangle} + D^a \widehat{\mathcal{E}}_{ka} - \frac{2}{3} D_k \mathcal{E} + \widehat{\Theta} \mathcal{E}_k + \frac{4\mathcal{E}}{3} \widehat{A}_k - \mathcal{E}_{ka} \widehat{A}^a - 3\widehat{\mathcal{H}}_{ka} \widehat{\omega}^a + \left(K - \frac{2}{3} \Theta \right) \widehat{\mathcal{E}}_k + \mathcal{F}_{ka} (K^a - 2L^a) \\
& + \frac{\mathcal{E}^a}{2} (3\widehat{\sigma}_{ka} + \widehat{\omega}_{ka}) + (\sigma_{ka} + 3\omega_{ka}) \widehat{\mathcal{E}}^a - \frac{3}{2} \varepsilon_k{}^{ab} \mathcal{H}_a K_b + \varepsilon_k{}^{ab} \widehat{\mathcal{H}}_{ca} \widehat{\sigma}_b{}^c + \frac{2\widetilde{\kappa}^2}{3} \widetilde{\pi}'_{\langle k \rangle} + \frac{\widetilde{\kappa}^2}{3} D^a \widetilde{\pi}_{ka} \\
& - \frac{\widetilde{\kappa}^2}{3} D_k (\widetilde{\rho} + \widetilde{\pi} - \widetilde{p}) + \frac{2\widetilde{\kappa}^2 \widetilde{q}}{3} (K_k - 2L_k) + \frac{2\widetilde{\kappa}^2}{3} \left(K + \frac{\Theta}{3} \right) \widetilde{q}_k - \frac{2\widetilde{\kappa}^2}{3} \widetilde{\pi}_{ka} \widehat{A}^a \\
& + \frac{2\widetilde{\kappa}^2}{3} (\widetilde{\pi} - \widetilde{p}) \widehat{A}_k + \frac{2\widetilde{\kappa}^2}{3} \widehat{\Theta} \widetilde{\pi}_k + \frac{\widetilde{\kappa}^2}{3} [(\widehat{\omega}_{ka} + 3\widehat{\sigma}_{ka}) \widetilde{\pi}^a - (3\omega_{ka} + \sigma_{ka}) \widetilde{q}^a] , \quad (2.65)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & \hat{\mathcal{E}}'_{\langle kj \rangle} - \mathcal{E}'_{\langle kj \rangle} + \varepsilon_{ab\langle k} D^a \hat{\mathcal{H}}_j{}^b + \frac{1}{2} D_{\langle k} \mathcal{E}_{j \rangle} + \frac{2\mathcal{E}}{3} \hat{\sigma}_{jk} - \frac{2\hat{\Theta}}{3} \mathcal{E}_{kj} + \hat{\Theta} \hat{\mathcal{E}}_{kj} - \mathcal{E}_{\langle k} \hat{A}_{j \rangle} - 3\mathcal{H}_{\langle k} \omega_{j \rangle} \\
& - \frac{1}{2} \hat{\mathcal{E}}_{\langle k} (2K_{j \rangle} - L_{j \rangle}) + 2\mathcal{F}_{a\langle k} \sigma_{j \rangle}{}^a - \mathcal{E}_{\langle k}{}^a (\hat{\omega}_{j \rangle a} - \hat{\sigma}_{j \rangle a}) + \hat{\mathcal{E}}_{\langle k}{}^a (\hat{\omega}_{j \rangle a} - 3\hat{\sigma}_{j \rangle a}) - \frac{\Theta}{3} \mathcal{F}_{kj} \\
& + 2\varepsilon_{\langle k}{}^{ab} \hat{\mathcal{H}}_{j \rangle a} \hat{A}_b - \varepsilon_{\langle k}{}^{ab} \mathcal{H}_{j \rangle a} (2K_b - L_b) - \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} \tilde{\pi}'_{\langle kj \rangle} - \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} \tilde{q}_{\langle k} (4K_{j \rangle} - L_{j \rangle}) + \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} D_{\langle k} \tilde{\pi}_{j \rangle} \\
& - \frac{4\tilde{\kappa}^2}{3} \tilde{\pi}_{\langle k} \hat{A}_{j \rangle} + \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} \tilde{q} \sigma_{jk} + \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} (\tilde{\pi} - \tilde{p}) \hat{\sigma}_{jk} - \frac{\tilde{\kappa}^2 \hat{\Theta}}{9} \tilde{\pi}_{jk} - \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} \tilde{\pi}_{\langle k}{}^a (\hat{\omega}_{j \rangle a} + \hat{\sigma}_{j \rangle a}), \tag{2.66}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & \mathcal{H}'_{\langle kj \rangle} + \varepsilon_{ab\langle k} D^a \mathcal{F}_{j \rangle}{}^b + \frac{1}{2} D_{\langle j} \mathcal{H}_{k \rangle} - \left(K - \frac{\Theta}{3} \right) \hat{\mathcal{H}}_{kj} + \frac{2\hat{\Theta}}{3} \mathcal{H}_{kj} - \frac{3}{2} \mathcal{H}_{\langle k} \hat{A}_{j \rangle} \\
& - \frac{3}{2} \hat{\mathcal{E}}_{\langle j} \hat{\omega}_{k \rangle} + 3\omega_{\langle k} \mathcal{E}_{j \rangle} - 2\hat{\mathcal{H}}_{a\langle k} \sigma_{j \rangle}{}^a + \mathcal{H}_{\langle j}{}^a (\hat{\omega}_{k \rangle a} - \hat{\sigma}_{k \rangle a}) + \varepsilon_{\langle k}{}^{ab} \hat{\mathcal{E}}_{j \rangle a} (K_b + L_b) \\
& - \varepsilon_{\langle k}{}^{ab} E_{j \rangle a} (2K_b - L_b) - \frac{3}{2} \varepsilon_{\langle k}{}^{ab} \hat{\sigma}_{j \rangle a} \hat{\mathcal{E}}_b + \varepsilon_{\langle k}{}^{ab} \mathcal{F}_{j \rangle a} \hat{A}_b, \tag{2.67}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & \hat{\mathcal{H}}'_{\langle kj \rangle} + \varepsilon_{ab\langle k} D^a \hat{\mathcal{E}}_{j \rangle}{}^b - \frac{3}{2} \mathcal{H}_{\langle k} K_{j \rangle} - K \mathcal{H}_{kj} + \hat{\Theta} \hat{\mathcal{H}}_{kj} - (\hat{\omega}_{a\langle k} + 3\hat{\sigma}_{a\langle k}) \hat{\mathcal{H}}_{j \rangle}{}^a + \frac{3}{2} \mathcal{E}_{\langle j} \hat{\omega}_{k \rangle} \\
& - \varepsilon_{\langle k}{}^{ab} (\mathcal{E}_{j \rangle a} - 2\hat{\mathcal{E}}_{j \rangle a}) \hat{A}_b + \frac{1}{2} \varepsilon_{\langle k}{}^{ab} \hat{\sigma}_{j \rangle a} \mathcal{E}_b - \varepsilon_{\langle k}{}^{ab} \sigma_{j \rangle a} \hat{\mathcal{E}}_b - \varepsilon_{\langle k}{}^{ab} \mathcal{F}_{j \rangle a} (K_b - 2L_b) \\
& - 3\hat{\mathcal{E}}_{\langle j} \omega_{k \rangle} + \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} \varepsilon_{ab\langle k} D^a \tilde{\pi}_{j \rangle}{}^b + \tilde{\kappa}^2 (\tilde{q}_{\langle j} \omega_{k \rangle} + \tilde{\pi}_{\langle j} \hat{\omega}_{k \rangle}) + \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} \varepsilon_{\langle k}{}^{ab} (\sigma_{j \rangle a} \tilde{q}_b + \hat{\sigma}_{j \rangle a} \tilde{\pi}_b), \tag{2.68}
\end{aligned}$$

$$0 = D^k \mathcal{H}_k - \hat{\mathcal{H}}_{ab} \sigma^{ab} + \mathcal{H}_{ab} \hat{\sigma}^{ab} - 3\mathcal{E}_a \omega^a - 3\hat{\mathcal{E}}_a \hat{\omega}^a, \tag{2.69}$$

$$\begin{aligned}
0 = & D^a \hat{\mathcal{E}}_{ak} - D^a \mathcal{E}_{ak} - \frac{1}{3} D_k \mathcal{E} - \frac{\hat{\Theta}}{3} \mathcal{E}_k - \frac{\Theta}{3} \hat{\mathcal{E}}_k + 3\mathcal{H}_{ka} \omega^a - \varepsilon_k{}^{ab} \mathcal{H}_{ac} \sigma_b{}^c \\
& + \frac{1}{2} \left[(3\hat{\omega}_{ka} + \hat{\sigma}_{ka}) \mathcal{E}^a + (3\omega_{ka} + \sigma_{ka}) \hat{\mathcal{E}}^a \right] - 3\hat{\mathcal{H}}_{ka} \hat{\omega}^a + \varepsilon_k{}^{ab} \hat{\mathcal{H}}_{ac} \hat{\sigma}_b{}^c - \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} D^a \tilde{\pi}_{ak} \\
& + \frac{\tilde{\kappa}^2}{6} D_k (\tilde{\rho} - \tilde{\pi} + \tilde{p}) - \frac{2\tilde{\kappa}^2 \Theta}{9} \tilde{q}_k - \frac{2\tilde{\kappa}^2 \hat{\Theta}}{9} \tilde{\pi}_k + \tilde{\kappa}^2 \tilde{q}^a \omega_{ka} + \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} \tilde{q}^a \sigma_{ka} + \tilde{\kappa}^2 \tilde{\pi}^a \hat{\omega}_{ka} + \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} \tilde{\pi}^a \hat{\sigma}_{ka}, \tag{2.70}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & D^a \mathcal{H}_{ak} + \frac{1}{2} \varepsilon_k{}^{ab} D_a \hat{\mathcal{E}}_b - \frac{\hat{\Theta}}{3} \mathcal{H}_k - \frac{4\mathcal{E}}{3} \omega_k - \hat{\mathcal{H}}_{ka} L^a - 2\mathcal{F}_{ka} \hat{\omega}^a - (\hat{\sigma}_{ka} - 2\hat{\omega}_{ka}) \mathcal{H}^a \\
& - \left(\hat{\mathcal{E}}_{ka} - 3\mathcal{E}_{ka} \right) \omega^a - \varepsilon_k{}^{ab} \left(\mathcal{E}_{ac} - \hat{\mathcal{E}}_{ac} \right) \sigma_b{}^c - \frac{1}{2} \varepsilon_k{}^{ab} \mathcal{E}_a L_b + \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} \varepsilon_k{}^{ab} D_a \tilde{q}_b \\
& - \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} \varepsilon_k{}^{ab} \tilde{\pi}_a L_b + \frac{2\tilde{\kappa}^2}{3} \tilde{q} \hat{\omega}_k + \frac{2\tilde{\kappa}^2}{3} (\tilde{\rho} + \tilde{p}) \omega_k - \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} \tilde{\pi}_{ka} \omega^a - \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} \varepsilon_k{}^{ab} \tilde{\pi}_a{}^c \sigma_{bc}, \tag{2.71}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & D^a \hat{\mathcal{H}}_{ak} - \frac{1}{2} \varepsilon_k{}^{ab} D_a \mathcal{E}_b - \frac{\Theta}{3} \mathcal{H}_k - \mathcal{H}_{ka} L^a + 2\mathcal{F}_{ka} \omega^a + \left(\mathcal{E}_{ka} - 3\hat{\mathcal{E}}_{ka} \right) \hat{\omega}^a - \frac{4\mathcal{E}}{3} \hat{\omega}_k \\
& - (\sigma_{ka} - 2\omega_{ka}) \mathcal{H}^a - \frac{1}{2} \varepsilon_k{}^{ab} L_a \hat{\mathcal{E}}_b + \varepsilon_k{}^{ab} \hat{\sigma}_b{}^c \left(\hat{\mathcal{E}}_{ca} - \mathcal{E}_{ca} \right) - \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} \varepsilon_k{}^{ab} D_a \tilde{\pi}_b \\
& - \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} \varepsilon_k{}^{ab} L_a \tilde{q}_b - \frac{2\tilde{\kappa}^2}{3} \tilde{q} \omega_k - \frac{2\tilde{\kappa}^2}{3} (\tilde{\pi} - \tilde{p}) \hat{\omega}_k - \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} \tilde{\pi}_{ka} \hat{\omega}^a + \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} \varepsilon_k{}^{ab} \tilde{\pi}_{cb} \hat{\sigma}_a{}^c. \tag{2.72}
\end{aligned}$$

2.1.7. 3+1 gravitációs dinamika a bránon

Ebben az alfejezetben figyelembe veszem a brán disztribucionális járulékát az 5d energia-impulzus tenzorhoz.

Lanczos egyenlet

A brán külső görbülete: $\nabla_{(c} n_{d)} = g_{(c}^a g_{d)}^b \tilde{\nabla}_a n_b$ megegyezik a (2.7b) egyenlet utolsó négy tagjának szimmetrizáltjával. Behelyettesítve \hat{K}_{ab} -t a (2.10) kifejezésből, és az eredményt bránra specializálva (2.12) egyenleten keresztül, a brán külső görbületére kapjuk:

$${}^{(4)}K_{ab} = \hat{K} u_a u_b - 2u_{(a} \hat{K}_{b)} + \frac{\hat{\Theta}}{3} h_{ab} + \hat{\sigma}_{ab} . \quad (2.73)$$

Az (1.80) Lanczos egyenlet [129], [128] összeköti a (2.73) külső görbület bránon keresztüli ugrását az Einstein egyenlet disztribucionális forrásával. Az $u^a u^b$, $u^a h_c^b$ és a $h_c^a h_d^b$ projekció spurja, illetve szimmetrikus spurmentes része adja:

$$\Delta \hat{K} = \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} (\lambda - 2\rho - 3p) , \quad (2.74)$$

$$\Delta \hat{K}_a = \tilde{\kappa}^2 q_a , \quad (2.75)$$

$$\Delta \hat{\Theta} = -\tilde{\kappa}^2 (\lambda + \rho) , \quad (2.76)$$

$$\Delta \hat{\sigma}_{ab} = -\tilde{\kappa}^2 \pi_{ab} . \quad (2.77)$$

A Lanczos egyenlet szükséges ahhoz, hogy származtassuk a gravitációs dinamikát a bránon, ami ekvivalens a kétszer-kontrahált Gauss, a 4d vektoriális Codacci és a 4d tenzoriális effektív Einstein egyenletekkel [130]. Az effektív Einstein egyenletet először [168]-ban adták meg, amit később [130] általánosított nem nulla \tilde{T}_{ab} -re és aszimmetrikus beágyazásra.

Az effektív Einstein egyenlet forrásainak 3+1 felbontása

Az effektív Einstein egyenlet [130]:

$$G_{ab} = - \left(\Lambda - \frac{\tilde{\kappa}^2 \langle \tilde{\pi} \rangle}{2} \right) g_{ab} + \kappa^2 T_{ab} + \tilde{\kappa}^4 S_{ab} - \langle {}^{(4)}\mathcal{E}_{ab} \rangle + \langle L_{ab} \rangle + \langle \mathcal{P}_{ab} \rangle . \quad (2.78)$$

Forrás tagok: az energia-impulzus tenzor T_{ab} , amely standard modell anyagot reprezentál [felbontását (2.19) egyenlet adja]; az S_{ab} forrás tag kvadratikus T_{ab} -ben (nagy energiákon domináns); $\langle \mathcal{P}_{ab} \rangle$ és $\langle \tilde{\pi} \rangle$ az 5d anyag járuléka; az $\langle L_{ab} \rangle$ forrás tag a brán aszimmetrikus beágyazása miatt jelenik meg; és ${}^{(4)}\mathcal{E}_{ab}$ az 5d Weyl tenzor hatása. A κ^2 4d csatolási és Λ brán kozmológiai állandó kapcsolata a bránfeszültséggel, illetve $\tilde{\Lambda}$ -vel:

$$6\kappa^2 = \tilde{\kappa}^4 \lambda , \quad (2.79)$$

$$2\Lambda = \kappa^2 \lambda + \langle \tilde{\Lambda} \rangle . \quad (2.80)$$

A kvadratikus forrás tag felbontását a T_{ab} felbontása meghatározza:

$$\begin{aligned} S_{ab} = & \frac{1}{24} (2\rho^2 - 3\pi_{cd}\pi^{cd}) u_a u_b + \frac{1}{24} (2\rho^2 + 4p\rho - 4q_c q^c + \pi_{cd}\pi^{cd}) h_{ab} \\ & + \frac{1}{4} q_{\langle a} q_{b \rangle} + \frac{\rho}{3} q_{(a} u_{b)} - \frac{1}{2} q^c \pi_{c(a} u_{b)} - \frac{\rho + 3p}{12} \pi_{ab} - \frac{1}{4} \pi_{c\langle a} \pi_{b \rangle}^c . \end{aligned} \quad (2.81)$$

Néhány numerikus együtthatót korrigáltam itt [3] (7) egyenletéhez képest.

Az 5d Weyl tenzor járuléka megadható a 2.1.3. alfejezetben bevezetett gravito-elektromágneses mennyiségekkel:

$$\langle {}^{(4)}\mathcal{E}_{ab} \rangle = \langle \mathcal{E} \rangle \left(u_a u_b + \frac{1}{3} h_{ab} \right) - 2 \langle \hat{\mathcal{E}}_{(a} \rangle u_{b)} + \langle \hat{\mathcal{E}}_{ab} \rangle . \quad (2.82)$$

Az aszimmetria forrás tag megadható kinematikai mennyiségekkel:

$$\begin{aligned} \langle L_{ab} \rangle = & \frac{1}{3} \left[\langle \hat{\Theta} \rangle^2 - \frac{3}{2} \langle \hat{\sigma}_{cd} \rangle \langle \hat{\sigma}^{cd} \rangle \right] u_a u_b \\ & - u_{(a} \left[\frac{4}{3} \langle \hat{\Theta} \rangle h_{b)c} - 2 \langle \hat{\sigma}_{b)c} \rangle \right] \langle \hat{K}^c \rangle \\ & + \frac{1}{9} \left[6 \langle \hat{\Theta} \rangle \langle \hat{K} \rangle - 9 \langle \hat{K}^c \rangle \langle \hat{K}_c \rangle - \langle \hat{\Theta} \rangle^2 + \frac{9}{2} \langle \hat{\sigma}_{cd} \rangle \langle \hat{\sigma}^{cd} \rangle \right] h_{ab} \\ & + \langle \hat{K}_a \rangle \langle \hat{K}_b \rangle + \left\langle \frac{\hat{\Theta}}{3} - \hat{K} \right\rangle \langle \hat{\sigma}_{ab} \rangle - \langle \hat{\sigma}_a{}^c \rangle \langle \hat{\sigma}_{bc} \rangle . \end{aligned} \quad (2.83)$$

Mivel az indukált metrika folytonos a bránon, az $L = g^{ab} L_{ab}$ átlaga az átlag nyoma:

$$\langle L \rangle = \langle \hat{\sigma}_{cd} \rangle \langle \hat{\sigma}^{cd} \rangle - 2 \langle \hat{K}_b \rangle \langle \hat{K}^b \rangle - \frac{2}{3} \langle \hat{\Theta} \rangle^2 + 2 \langle \hat{\Theta} \rangle \langle \hat{K} \rangle . \quad (2.84)$$

Szimmetrikus beágyazás mellett $\langle {}^{(4)}K_{ab} \rangle = 0$, ezért (2.73) miatt $\langle \hat{\Theta} \rangle = \langle \hat{K} \rangle = 0 = \langle \hat{K}_a \rangle = \langle \hat{\sigma}_{ab} \rangle$, így $\langle L_{ab} \rangle = 0$.

Végezetül az 5d anyag járulékának felbontása:

$$\frac{6\mathcal{P}_{ab}}{\tilde{\kappa}^2} = 3(\tilde{\rho} + \tilde{p}) u_a u_b + 8\tilde{q}_{(a} u_{b)} + (\tilde{\rho} + \tilde{p}) h_{ab} + 4\tilde{\pi}_{ab} . \quad (2.85)$$

Gravitációs dinamika a bránon: általános beágyazás

Azért, hogy evolúciós és kényszer egyenleteket kapjunk a bránon, szelektálom a 2.1.6 alfejezet Ricci, és a Bianchi azonosságainak egy alhalmazát. Az alhalmaz kiválasztásában a következők játszanak szerepet: az egyenletek kombinációi

- csak olyan kinematikai mennyiségeket tartalmazzanak, melyek megjelennek a 4d leírásban (Θ , A_a , ω_a , σ_{ab}) (lásd pl. általános relativitáselmélet);
- csak olyan gravito-elektromágneses mennyiségeket tartalmazzanak, melyek megjelennek a 4d leírásban (E_{ab} , H_{ab}), vagy az effektív Einstein egyenletben (\mathcal{E} , $\hat{\mathcal{E}}_a$, $\hat{\mathcal{E}}_{ab}$);
- ne jelenjenek meg bennük bránra merőleges irányú deriválások.

Először a \mathcal{H}_a , \mathcal{E}_a , \mathcal{F}_{ab} és $\hat{\mathcal{H}}_{ab}$ mennyiséget kifejezem (2.37), (2.47), (2.43) és (2.49) egyenletekből, és felhasználom a (2.15), (2.16) definíciókat azért, hogy bevezessem E_{ab} -t és H_{ab} -t az \mathcal{E}_{ab} , illetve \mathcal{H}_{ab} helyett. Behelyettesítem a kapott kifejezéseket a egyenletek következő kombinációiba: (2.41), (2.30), (2.54), (2.56)–(2.65), (2.28), (2.31), (2.32), (2.38), (2.39), (2.40), (2.57)–(2.59), (2.60), (2.70) és (2.71), amiket a brán egyes oldalain kiértékelek. A kapott egyenletrendszer a B.3 mellékletben található. Ezek az evolúciós, és kényszer egyenletek a brán tetszőleges beágyazása esetén fennállnak. Evolúciós egyenletek a következő mennyiségekre vonatkoznak: $\hat{\Theta}$, \hat{K}_a , Θ , ω_a , σ_{ab} , \mathcal{E} , $\hat{\mathcal{E}}_a$, E_{ab} , H_{ab} . Az egyenletek érvényesek a brán mindkét oldalán, a bennük szereplő \hat{K} , $\hat{\Theta}$, \hat{K}_a és $\hat{\sigma}_{ab}$ kinematikai mennyiségek bránon keresztüli

ugrását a brán energia-impulzus tenzor meghatározza. Felhasználva (2.74)-(2.77) egyenleteket, a B.3 mellékletben felsorolt egyenletek átlagát véve az alábbi evolúciós

$$0 = \dot{\Theta} - D^a A_a + \frac{\Theta^2}{3} - A^a A_a - 2\omega_a \omega^a + \sigma_{ab} \sigma^{ab} + \frac{\kappa^2}{2} (\rho + 3p) - \Lambda + \frac{\tilde{\kappa}^4 \rho}{12} (2\rho + 3p) - \frac{\tilde{\kappa}^4}{4} q^a q_a + \langle \hat{\Theta} \rangle \langle \hat{K} \rangle - \langle \hat{K}^a \rangle \langle \hat{K}_a \rangle - \langle \mathcal{E} \rangle + \frac{\tilde{\kappa}^2}{2} \langle \tilde{\rho} + \tilde{\pi} + \tilde{p} \rangle, \quad (2.86)$$

$$0 = \dot{\omega}_{\langle a} - \frac{1}{2} \varepsilon_a^{cd} D_c A_d + \frac{2\Theta}{3} \omega_a - \sigma_{ab} \omega^b, \quad (2.87)$$

$$0 = \dot{\sigma}_{\langle ab} - D_{\langle a} A_{b\rangle} + \frac{2\Theta}{3} \sigma_{ab} - A_{\langle a} A_{b\rangle} + \omega_{\langle a} \omega_{b\rangle} + \sigma_{c\langle a} \sigma_{b\rangle}^c + E_{ab} + \frac{1}{2} \langle \hat{K} - \frac{\hat{\Theta}}{3} \rangle \langle \hat{\sigma}_{ab} \rangle + \frac{\langle \hat{\mathcal{E}}_{ab} \rangle}{2} - \frac{1}{2} \langle \hat{K}_{\langle a} \rangle \langle \hat{K}_{b\rangle} \rangle + \frac{1}{2} \langle \hat{\sigma}_{c\langle a} \rangle \langle \hat{\sigma}_{b\rangle}^c \rangle - \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} \langle \tilde{\pi}_{ab} \rangle + \frac{\tilde{\kappa}^4}{8} \left[\pi_{c\langle a} \pi_{b\rangle}^c - q_{\langle a} q_{b\rangle} - \frac{(2\lambda - \rho - 3p)}{3} \pi_{ab} \right], \quad (2.88)$$

$$0 = \langle \dot{\hat{\Theta}} \rangle - D^a \langle \hat{K}_a \rangle + \langle \hat{K} + \frac{\hat{\Theta}}{3} \rangle \Theta - 2 \langle \hat{K}^a \rangle A_a + \langle \hat{\sigma}_{ab} \rangle \sigma^{ab} - \tilde{\kappa}^2 \langle \tilde{q} \rangle, \quad (2.89)$$

$$0 = \langle \dot{\hat{K}}_{\langle a} \rangle - D_a \langle \hat{K} - \frac{2}{3} \hat{\Theta} \rangle - D^b \langle \hat{\sigma}_{ab} \rangle + \frac{4\Theta}{3} \langle \hat{K}_a \rangle - \langle \hat{K} + \frac{\hat{\Theta}}{3} \rangle A_a - \langle \hat{\sigma}_{ab} \rangle A^b - \omega_{ab} \langle \hat{K}^b \rangle + \sigma_{ab} \langle \hat{K}^b \rangle + \tilde{\kappa}^2 \langle \tilde{\pi}_a \rangle, \quad (2.90)$$

$$0 = \langle \dot{\mathcal{E}} \rangle - D^a \langle \hat{\mathcal{E}}_a \rangle + \frac{4}{3} \Theta \langle \mathcal{E} \rangle + \langle \hat{\mathcal{E}}_{ab} \rangle \sigma^{ab} - 2 \langle \hat{\mathcal{E}}_a \rangle A^a + \langle \hat{\sigma}^{ab} \rangle \left[\langle \dot{\hat{\sigma}}_{\langle ab} \rangle - D_a \langle \hat{K}_b \rangle + \langle \hat{K} + \frac{\hat{\Theta}}{3} \rangle \sigma_{ab} - 2A_b \langle \hat{K}_a \rangle + \frac{\Theta}{3} \langle \hat{\sigma}_{ab} \rangle + \sigma_{ca} \langle \hat{\sigma}_b^c \rangle \right] + \langle \hat{K}^a \rangle \left[\frac{2}{3} D_a \langle \hat{\Theta} \rangle - D^b \langle \hat{\sigma}_{ab} \rangle + \frac{2\Theta}{3} \langle \hat{K}_a \rangle - \langle \hat{K}^b \rangle \sigma_{ab} \right] + \frac{\tilde{\kappa}^4 \pi^{ab}}{4} \times \left[\dot{\pi}_{\langle ab} \rangle + D_a q_b + 2A_b q_a + \frac{\Theta}{3} \pi_{ab} + (\rho + p) \sigma_{ab} + \sigma_{ca} \pi_b^c \right] + \frac{\tilde{\kappa}^4 q^a}{4} \left[D^b \pi_{ab} - \frac{2}{3} D_a \rho + \frac{2\Theta}{3} q_a - \sigma_{ab} q^b \right] + \frac{\tilde{\kappa}^4 (\lambda + \rho)}{6} \Delta \tilde{q} - \frac{2\tilde{\kappa}^2}{3} \left[\frac{3 \langle \tilde{\rho} - \tilde{\pi} + \tilde{p} \rangle}{4} + D^a \langle \tilde{q}_a \rangle + \Theta \langle \tilde{\rho} + \tilde{p} \rangle + \langle \hat{\Theta} \rangle \langle \tilde{q} \rangle + 2 \langle \tilde{q}_a \rangle A^a + \langle \tilde{\pi}_{ab} \rangle \sigma^{ab} \right], \quad (2.91)$$

$$0 = \langle \dot{\hat{\mathcal{E}}}_{\langle k} \rangle + \frac{4\Theta}{3} \langle \hat{\mathcal{E}}_k \rangle - \frac{1}{3} D_k \langle \mathcal{E} \rangle - \frac{4 \langle \mathcal{E} \rangle}{3} A_k - D^a \langle \hat{\mathcal{E}}_{ka} \rangle - \langle \hat{\mathcal{E}}_{ka} \rangle A^a - (\omega_{ka} - \sigma_{ka}) \langle \hat{\mathcal{E}}^a \rangle + \langle \hat{K}^a \rangle \times \left[\langle \dot{\hat{\sigma}}_{\langle ka} \rangle + \sigma_{ck} \langle \hat{\sigma}_a^c \rangle - 2D_k \langle \hat{K}_a \rangle + D_a \langle \hat{K}_k \rangle - 2A_{\langle k} \rangle \langle \hat{K}_{a\rangle} - \sigma_{ba} \langle \hat{\sigma}_k^b \rangle + \varepsilon_{cab} \omega^b \langle \hat{\sigma}_k^c \rangle \right] + \langle \hat{\sigma}^{ab} \rangle \times \left[D_k \langle \hat{\sigma}_{ab} \rangle + \frac{2}{3} \langle \hat{K}_k \rangle \sigma_{ab} \right] + \langle \hat{K} + \frac{\hat{\Theta}}{3} \rangle \left[\frac{2}{3} D_k \langle \hat{\Theta} \rangle - D^b \langle \hat{\sigma}_{kb} \rangle + \frac{2\Theta}{3} \langle \hat{K}_k \rangle \right] - \langle \hat{\sigma}_b^a \rangle D^b \langle \hat{\sigma}_{ka} \rangle + \frac{\langle \hat{K}_k \rangle}{3} D^a \langle \hat{K}_a \rangle + \varepsilon_k^{ab} \langle \hat{K}_c \rangle \langle \hat{\sigma}_b^c \rangle \omega_a - \frac{\langle \hat{\sigma}_k^a \rangle}{3} D_a \langle \hat{\Theta} \rangle + \frac{\tilde{\kappa}^4 q^a}{4} \left[D_a q_k - 2D_k q_a - \dot{\pi}_{\langle ka} \rangle - \sigma_{ck} \pi_a^c - 2A_{\langle k} q_{a\rangle} + \sigma_{ba} \pi_k^b - \varepsilon_{cab} \omega^b \pi_k^c \right] - \frac{\tilde{\kappa}^4 \pi^{ab}}{4} \left[\frac{2q_k}{3} \sigma_{ab} - D_k \pi_{ab} \right] + \frac{\tilde{\kappa}^4 (\rho + p)}{6} \left[D_k \rho - \frac{3}{2} D^b \pi_{kb} - \Theta q_k \right] + \frac{\tilde{\kappa}^4}{12} \times \left[q_k D^a q_a - 3\pi_b^a D^b \pi_{ka} - \pi_k^a D_a \rho - 3\varepsilon_k^{ab} q_c \omega_a \pi_b^c \right] + \frac{2\tilde{\kappa}^2}{3} \left[\frac{D_k \langle \tilde{\rho} + 3\tilde{\pi} - 3\tilde{p} \rangle}{4} + \langle \hat{K} - \frac{\hat{\Theta}}{3} \rangle \langle \tilde{\pi}_k \rangle - \langle \tilde{\pi}'_{\langle k} \rangle - \langle K \rangle \langle \tilde{q}_k \rangle - \langle \tilde{q} \rangle \langle 2\hat{K}_k + K_k \rangle + \langle \tilde{\pi}_{ka} \rangle \langle \hat{A}^a \rangle - \langle \tilde{\pi} - \tilde{p} \rangle \langle \hat{A}_k \rangle - \frac{5 \langle \hat{\sigma}_{ka} \rangle}{2} \langle \tilde{\pi}^a \rangle - \frac{\tilde{\kappa}^2 q_k}{2} \Delta \tilde{q} + \frac{\tilde{\kappa}^2 (2\lambda - \rho - 3p)}{12} \Delta \tilde{\pi}_k + \frac{5\tilde{\kappa}^2 \pi_{ka}}{8} \Delta \tilde{\pi}^a - \frac{\Delta K}{4} \Delta \tilde{q}_k - \frac{\Delta K_k}{4} \Delta \tilde{q} + \frac{\Delta \hat{A}^a}{4} \Delta \tilde{\pi}_{ka} - \frac{[\Delta (\tilde{\pi} - \tilde{p})]}{4} \Delta \hat{A}_k \right], \quad (2.92)$$

$$\begin{aligned}
0 = & \dot{E}_{\langle kj \rangle} - \frac{1}{2} \langle \dot{\hat{\mathcal{E}}}_{\langle kj \rangle} \rangle - \varepsilon_{ab\langle k} D^a H_j^b + \frac{1}{2} D_{\langle k} \langle \hat{\mathcal{E}}_j \rangle + \Theta E_{kj} - \frac{\Theta}{6} \langle \hat{\mathcal{E}}_{kj} \rangle + \langle \hat{\mathcal{E}}_{\langle k} A_j \rangle - \frac{2}{3} \langle \mathcal{E} \rangle \sigma_{kj} \\
& - \frac{\langle \hat{\mathcal{E}}_{\langle j}^a \rangle}{2} (\omega_{\langle k} a + \sigma_{\langle k} a) + E_{\langle k}^a (\omega_{\langle j} a - 3\sigma_{\langle j} a) + 2\varepsilon_{\langle k}^{ab} H_{\langle j} a A_b - \langle \hat{\sigma}_{\langle j}^a \rangle \langle \dot{\hat{\sigma}}_{\langle k} a \rangle - \frac{\langle \hat{\sigma}_{kj} \rangle}{2} \langle \hat{K} - \frac{\hat{\Theta}}{3} \rangle \\
& + \langle \hat{K}_{\langle k} D_j \rangle \langle \hat{K} - \hat{\Theta} \rangle - \frac{\langle \hat{\Theta} \rangle}{3} D_{\langle k} \langle \hat{K}_j \rangle + \frac{\langle \hat{\sigma}_{\langle j}^a \rangle}{2} D_{\langle k} \langle \hat{K}_a \rangle + \frac{\langle \hat{K}_a \rangle}{2} D_{\langle k} \langle \hat{\sigma}_j^a \rangle + \frac{\langle \hat{\Theta} \rangle}{3} \langle \hat{K} + \frac{\hat{\Theta}}{3} \rangle \sigma_{kj} \\
& + \langle \hat{K}_{\langle k} \left[D^b \langle \hat{\sigma}_{\langle j} b \rangle + \frac{3}{2} \omega_{\langle j} a \langle \hat{K}^a \rangle + \langle \hat{\sigma}_{\langle j} a \rangle A^a - \frac{1}{2} \sigma_{\langle j} b \langle \hat{K}^b \rangle - \frac{7\Theta}{6} \langle \hat{K}_j \rangle \right] - \frac{\langle \hat{\sigma}^{ac} \rangle}{2} \langle \hat{\sigma}_{a\langle j} \omega_{\langle k} c \\
& - \frac{1}{2} \langle \hat{K} - \frac{\hat{\Theta}}{3} \rangle \left[\langle \dot{\hat{\sigma}}_{\langle kj} \rangle + \frac{\Theta}{3} \langle \hat{\sigma}_{kj} \rangle - 2 \langle \hat{K}_{\langle k} A_j \rangle + \langle \hat{\sigma}_{\langle k}^a \rangle (\omega_{\langle j} a + \sigma_{\langle j} a) \right] - \frac{\sigma_{jk}}{2} \langle \hat{K}^a \rangle \langle \hat{K}_a \rangle \\
& + \langle \hat{\sigma}_{a\langle j} A_{\langle k} \rangle \langle \hat{K}^a \rangle - \frac{\langle \hat{\sigma}^{ca} \rangle}{2} \langle \hat{\sigma}_{c\langle k} \sigma_{\langle j} a \rangle - \frac{\Theta}{6} \langle \hat{\sigma}_{\langle j}^a \rangle \langle \hat{\sigma}_{\langle k} a \rangle + \frac{\tilde{\kappa}^4}{8} \left[\frac{2}{3} q_{\langle k} D_j \rangle (\rho - 3p) - \frac{(\rho + 3p)}{3} \pi_{kj} \right. \\
& - 2\pi_{\langle j}^a \dot{\pi}_{\langle k} a + \frac{2(\lambda + \rho)}{3} D_{\langle k} q_j \rangle - \pi_{\langle j}^a D_{\langle k} q_a - q_a D_{\langle k} \pi_j^a + \frac{2(\lambda + \rho)}{3} (\rho + p) \sigma_{kj} - \pi_{\langle j}^a \omega_{\langle k} c \pi_a^c \\
& - \sigma_{jk} q^a q_a - 2\pi_{a\langle j} A_{\langle k} \rangle q^a + q_{\langle k} \left(-2D^b \pi_{\langle j} b + 3\omega_{\langle j} a q^a - 2\pi_{\langle j} a A^a - \sigma_{\langle j} b q^b - \frac{7\Theta}{3} q_j \right) - \pi^{ca} \pi_{c\langle k} \sigma_{\langle j} a \\
& + \frac{(2\lambda - \rho - 3p)}{3} \left(\dot{\pi}_{\langle kj} \rangle + \frac{\Theta}{3} \pi_{kj} + 2q_{\langle k} A_j \rangle + \pi_{\langle k}^a \omega_{\langle j} a + \pi_{\langle k}^a \sigma_{\langle j} a \right) - \frac{\Theta}{3} \pi_{\langle j}^a \pi_{\langle k} a \left] - \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} \left[\langle \dot{\pi}_{\langle kj} \rangle \right. \right. \\
& \left. \left. + D_{\langle k} \langle \tilde{q}_j \rangle - \langle \tilde{\pi}_{\langle k} \rangle \langle \hat{K}_j \rangle - \frac{\tilde{\kappa}^2}{4} q_{\langle k} \Delta \tilde{\pi}_j \rangle + 4 \langle \tilde{q}_{\langle k} A_j \rangle + \langle \tilde{\rho} + \tilde{p} \rangle \sigma_{jk} + \frac{\Theta}{3} \langle \tilde{\pi}_{jk} \rangle + \langle \tilde{\pi}_{\langle j}^a \rangle (\omega_{\langle k} a + \sigma_{\langle k} a) \right] , \quad (2.93)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & \dot{H}_{\langle kj \rangle} + \varepsilon_{ab\langle k} D^a E_j^b + \frac{1}{2} \varepsilon_{ab\langle k} D^a \langle \hat{\mathcal{E}}_j^b \rangle + \Theta H_{kj} - 3\sigma_{a\langle k} H_j^a - \omega_{a\langle k} H_j^a - 2\varepsilon_{\langle k}^{ab} E_j^a A_b \\
& - \frac{3}{2} \langle \hat{\mathcal{E}}_{\langle j} \rangle \omega_{\langle k} \rangle - \frac{1}{2} \varepsilon_{\langle k}^{ab} \sigma_{\langle j} a \langle \hat{\mathcal{E}}_b \rangle - \frac{1}{2} \varepsilon_{\langle k}^{cd} \langle \hat{\sigma}_{\langle j} c \rangle D_d \langle \hat{K} - \frac{\hat{\Theta}}{3} \rangle + \frac{1}{2} \langle \hat{K} - \frac{\hat{\Theta}}{3} \rangle \varepsilon_{ab\langle k} D^a \langle \hat{\sigma}_{\langle j}^b \rangle \\
& + \frac{\langle \hat{\sigma}^{cb} \rangle}{2} \varepsilon_{ab\langle k} D^a \langle \hat{\sigma}_{\langle j} c \rangle + \langle \hat{\Theta} \rangle \langle \hat{K}_{\langle k} \omega_{\langle j} \rangle + \frac{1}{2} \varepsilon_{ab\langle k} \langle \hat{\sigma}_{\langle j} c \rangle D^a \langle \hat{\sigma}^{cb} \rangle + \frac{\langle \hat{\Theta} \rangle}{3} \varepsilon_{\langle k}^{ab} \sigma_{\langle j} a \langle \hat{K}_b \rangle \\
& - \frac{1}{2} \varepsilon_{ab\langle k} \langle \hat{K}_j \rangle D^a \langle \hat{K}^b \rangle - \frac{1}{2} \varepsilon_{ab\langle k} \langle \hat{K}^b \rangle D^a \langle \hat{K}_j \rangle + \frac{\langle \hat{K}_c \rangle}{2} \varepsilon_{\langle k}^{ab} \sigma_{\langle j} b \langle \hat{\sigma}_a^c \rangle - \frac{3 \langle \hat{K}_a \rangle}{2} \langle \hat{\sigma}_{\langle j}^a \rangle \omega_{\langle k} \rangle \\
& + \frac{\tilde{\kappa}^4}{8} \left[\varepsilon_{ab\langle k} D^a \pi_{\langle j} c \pi^{cb} + \varepsilon_{ab\langle k} \pi_{\langle j} c D^a \pi^{cb} - \frac{1}{3} \varepsilon_{\langle k}^{cd} \pi_{\langle j} c D_d (\rho + 3p) - \varepsilon_{ab\langle k} q^b D^a q_j \right. \\
& - \frac{(2\lambda - \rho - 3p)}{3} \varepsilon_{ab\langle k} D^a \pi_j^b - (\lambda + \rho) \omega_{\langle k} q_j - \frac{2(\lambda + \rho)}{3} \varepsilon_{\langle k}^{ab} \sigma_{\langle j} a q_b - \varepsilon_{ab\langle k} q_j D^a q^b \\
& \left. - \varepsilon_{\langle k}^{ab} \sigma_{\langle j} b \pi_a^c q_c + 3\pi_{\langle j}^a \omega_{\langle k} q_a \right] - \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} \varepsilon_{ab\langle k} D^a \langle \tilde{\pi}_j^b \rangle - \tilde{\kappa}^2 \langle \tilde{q}_{\langle j} \rangle \omega_{\langle k} \rangle - \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} \varepsilon_{\langle k}^{ab} \sigma_{\langle j} a \langle \tilde{q}_b \rangle , \quad (2.94)
\end{aligned}$$

és kényszeregyenletek kaphatók:

$$\begin{aligned}
0 = & D^a E_{ak} - \frac{1}{2} D^a \langle \hat{\mathcal{E}}_{ak} \rangle + \frac{1}{3} D_k \langle \mathcal{E} \rangle - 3H_{ka} \omega^a + \varepsilon_k^{ab} H_{ac} \sigma_b^c + \frac{\Theta}{3} \langle \hat{\mathcal{E}}_k \rangle - \frac{1}{2} (3\omega_{ka} + \sigma_{ka}) \langle \hat{\mathcal{E}}^a \rangle \\
& - \frac{2 \langle \hat{\Theta} \rangle}{9} D_k \langle \hat{\Theta} \rangle - \frac{\langle \hat{\sigma}_{ak} \rangle}{2} D^a \langle \hat{K} - \frac{\hat{\Theta}}{3} \rangle - \frac{1}{2} \langle \hat{K} - \frac{\hat{\Theta}}{3} \rangle D^a \langle \hat{\sigma}_{ak} \rangle - \frac{\langle \hat{\sigma}_a^c \rangle}{2} D^a \langle \hat{\sigma}_{ck} \rangle + \frac{\langle \hat{\Theta} \rangle}{3} \langle \hat{K}^b \rangle \sigma_{kb} \\
& - \frac{\langle \hat{\sigma}_a^b \rangle}{2} \langle \hat{K}^a \rangle \sigma_{kb} + \frac{2 \langle \hat{\sigma}^{ab} \rangle}{3} D_k \langle \hat{\sigma}_{ab} \rangle - \frac{\langle \hat{K}^a \rangle}{3} D_k \langle \hat{K}_a \rangle + \frac{\langle \hat{K}_a \rangle}{2} D^a \langle \hat{K}_k \rangle + \frac{\langle \hat{K}_k \rangle}{2} D^a \langle \hat{K}_a \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{2} \varepsilon_k^{ad} \langle \hat{K}_c \rangle \langle \hat{\sigma}_d^c \rangle \omega_a + \langle \hat{\Theta} \rangle \varepsilon_k^{cd} \langle \hat{K}_c \rangle \omega_d + \frac{\Theta}{3} \langle \hat{\sigma}_k^a \rangle \langle \hat{K}_a \rangle - \frac{2\Theta}{9} \langle \hat{\Theta} \rangle \langle \hat{K}_k \rangle - \langle \hat{\sigma}_{kb} \rangle D^a \langle \hat{\sigma}_a^b \rangle - \frac{\tilde{\kappa}^4}{8} \\
& \times \left[\frac{4(\lambda + \rho)}{9} D_k \rho + \frac{\pi_{ak}}{3} D^a (\rho + 3p) - \frac{(2\lambda - \rho - 3p)}{3} D^a \pi_{ak} + \pi_a^c D^a \pi_{ck} - \frac{4\pi^{ab}}{3} D_k \pi_{ab} + \pi_{kb} D^a \pi_a^b \right. \\
& \quad \left. - q_a D^a q_k - q_k D^a q_a + 3\varepsilon_k^{ad} q_c \omega_a \pi_d^c - \pi_a^b q^a \sigma_{kb} + \frac{2(\lambda + \rho)}{3} \left(\sigma_{kb} q^b - \frac{2\Theta}{3} q_k + 3\varepsilon_k^{cd} q_c \omega_d \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{2q^a}{3} D_k q_a + \frac{2\Theta}{3} \pi_k^a q_a \right] + \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} D^a \langle \pi_{ak} \rangle - \frac{\tilde{\kappa}^2}{6} D_k \langle \tilde{\rho} - \tilde{\pi} + \tilde{p} \rangle + \frac{2\tilde{\kappa}^2}{9} \Theta \langle \tilde{q}_k \rangle - \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} \langle \tilde{q}^a \rangle (3\omega_{ka} + \sigma_{ka}) , \\
\end{aligned} \tag{2.95}$$

$$\begin{aligned}
0 = & D^a H_{ak} - \frac{4\langle \mathcal{E} \rangle}{3} \omega_k + 3E_{ka} \omega^a + \frac{\omega^a}{2} \langle \hat{\mathcal{E}}_a \rangle + \frac{\varepsilon_k^{ab}}{2} \left[D_a \langle \hat{\mathcal{E}}_b \rangle - 2E_{ac} \sigma_b^c + \langle \hat{\mathcal{E}}_{ac} \rangle \sigma_b^c - \langle \hat{\sigma}_a^c \rangle D_b \langle \hat{K}_c \rangle \right. \\
& - \frac{2\langle \hat{K}_b \rangle}{3} D_a \langle \hat{\Theta} \rangle - \frac{2\langle \hat{\Theta} \rangle}{3} D_a \langle \hat{K}_b \rangle + \sigma_{ac} \langle \hat{K}^c \rangle \langle \hat{K}_b \rangle + \langle \hat{\sigma}_{da} \rangle \langle \hat{\sigma}^{cd} \rangle \sigma_{cb} - \langle \hat{K}^c \rangle D_b \langle \hat{\sigma}_{ac} \rangle \left. \right] - \frac{\omega^c}{2} \langle \hat{K}_k \rangle \langle \hat{K}^c \rangle \\
& + \frac{1}{2} \langle \hat{K} - \frac{\hat{\Theta}}{3} \rangle \left[\langle \hat{\sigma}_{ck} \rangle \omega^c + \varepsilon_k^{ab} \langle \hat{\sigma}_{ac} \rangle \sigma_b^c \right] + \frac{2\langle \hat{\Theta} \rangle}{3} \langle \hat{K} + \frac{\hat{\Theta}}{3} \rangle \omega_k - \frac{\omega_k}{2} \left[\langle \hat{K}_a \rangle \langle \hat{K}^a \rangle + \langle \hat{\sigma}_{ab} \rangle \langle \hat{\sigma}^{ab} \rangle \right] \\
& + \frac{\omega^a}{2} \langle \hat{\sigma}_{ca} \rangle \langle \hat{\sigma}_k^c \rangle + \frac{\tilde{\kappa}^4 \varepsilon_k^{ab}}{8} \left[\frac{2}{3} q_b D_a \rho + \frac{2(\lambda + \rho)}{3} D_a q_b + q^c D_b \pi_{ac} + \sigma_{ac} q^c q_b + \pi_{da} \pi^{cd} \sigma_{cb} + \pi_a^c D_b q_c \right] \\
& + \frac{\tilde{\kappa}^4}{8} \left[\frac{4(\lambda + \rho)}{3} (\rho + p) \omega_k - \frac{(2\lambda - \rho - 3p)}{3} (\pi_{ck} \omega^c + \varepsilon_k^{ab} \pi_{ac} \sigma_b^c) - q_a q^a \omega_k - q^c \omega_c q_k \right. \\
& \left. - \pi_{ab} \pi^{ab} \omega_k + \pi_{ca} \pi_k^c \omega^a \right] - \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} \langle \pi_{ka} \rangle \omega^a + \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} \varepsilon_k^{ab} D_a \langle \tilde{q}_b \rangle + \frac{2\tilde{\kappa}^2}{3} \langle \tilde{\rho} + \tilde{p} \rangle \omega_k - \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} \varepsilon_k^{ab} \langle \tilde{\pi}_a^c \rangle \sigma_{bc} . \\
\end{aligned} \tag{2.96}$$

$$0 = D^a \omega_a - A_a \omega^a , \tag{2.97}$$

$$0 = D_{\langle c} \omega_{k \rangle} + \varepsilon_{ab \langle k} D^b \sigma_{c \rangle}^a + 2A_{\langle c} \omega_{k \rangle} + H_{ab} , \tag{2.98}$$

$$\begin{aligned}
0 = & D^b \sigma_{ab} - \frac{2D_a \Theta}{3} + \varepsilon_a^{ck} D_c \omega_k + 2\varepsilon_a^{ck} A_c \omega_k + \frac{\tilde{\kappa}^4 (\lambda + \rho)}{6} q_a \\
& - \frac{\tilde{\kappa}^4 q^b}{4} \pi_{ab} - \frac{2\langle \hat{\Theta} \rangle}{3} \langle \hat{K}_a \rangle + \langle \hat{\sigma}_{ab} \rangle \langle \hat{K}^b \rangle + \langle \hat{\mathcal{E}}_a \rangle + \frac{2\tilde{\kappa}^2}{3} \langle \tilde{q}_a \rangle , \\
\end{aligned} \tag{2.99}$$

A különbség egyenletekből származó evolúciós egyenletek:

$$\dot{\rho} + (\rho + p) \Theta + D^a q_a + 2q^a A_a + \pi_{ab} \sigma^{ab} = -\Delta \tilde{q} , \tag{2.100}$$

$$\dot{q}_{\langle a} \rangle + D_a p + D^b \pi_{ab} + \frac{4}{3} \Theta q_a + \sigma_{ab} q^b - \omega_{ab} q^b + (\rho + p) A_a + \pi_{ab} A^b = -\Delta \tilde{\pi}_a , \tag{2.101}$$

$$\begin{aligned}
0 = & \Delta \dot{\mathcal{E}} - D^a \Delta \hat{\mathcal{E}}_a + \frac{4}{3} \Theta \Delta \mathcal{E} + \sigma^{ab} \Delta \hat{\mathcal{E}}_{ab} - 2A^a \Delta \hat{\mathcal{E}}_a + \tilde{\kappa}^2 \left[\pi^{ab} D_a \langle \hat{K}_b \rangle - \langle \hat{\sigma}^{ab} \rangle D_a q_b - q^a D^b \langle \hat{\sigma}_{ab} \rangle \right. \\
& + \langle \hat{K}^a \rangle D^b \pi_{ab} + \frac{2q^a}{3} D_a \langle \hat{\Theta} \rangle - \frac{2\langle \hat{K}^a \rangle}{3} D_a \rho - \pi^{ab} \langle \dot{\hat{\sigma}}_{\langle ab} \rangle - \dot{\pi}_{\langle ab} \rangle \langle \hat{\sigma}^{ab} \rangle - 2A_a q_b \langle \hat{\sigma}^{ab} \rangle + 2A_a \pi^{ab} \langle \hat{K}_b \rangle \\
& \left. - \frac{2\Theta}{3} \pi_{ab} \langle \hat{\sigma}^{ab} \rangle - (\rho + p) \sigma_{ab} \langle \hat{\sigma}^{ab} \rangle - \langle \hat{K} + \frac{\hat{\Theta}}{3} \rangle \sigma_{ab} \pi^{ab} - 2\sigma_{ca} \pi^{ab} \langle \hat{\sigma}_b^c \rangle + \frac{4\Theta}{3} q^a \langle \hat{K}_a \rangle - 2\sigma_{ab} q^b \langle \hat{K}^a \rangle \right] \\
\end{aligned}$$

$$-\frac{[\Delta(\tilde{\rho}-\tilde{\pi}+\tilde{p})]}{2}-\frac{2}{3}D^a\Delta\tilde{q}_a-\frac{2[\Delta(\tilde{\rho}+\tilde{p})]}{3}\Theta+\frac{2\tilde{\kappa}^2(\lambda+\rho)}{3}\langle\tilde{q}\rangle-\frac{2\langle\hat{\Theta}\rangle}{3}\Delta\tilde{q}-\frac{4A^a}{3}\Delta\tilde{q}_a-\frac{2\sigma^{ab}}{3}\Delta\tilde{\pi}_{ab}\Big], \quad (2.102)$$

$$\begin{aligned} 0 = & \Delta\hat{\mathcal{E}}_{\langle k\rangle}+\frac{4}{3}\Theta\Delta\hat{\mathcal{E}}_k-\frac{1}{3}D_k\Delta\mathcal{E}-\frac{4}{3}A_k\Delta\mathcal{E}-D^a\Delta\hat{\mathcal{E}}_{ka}-\Delta\hat{\mathcal{E}}_{ka}A^a-(\omega_{ka}-\sigma_{ka})\Delta\hat{\mathcal{E}}^a+\tilde{\kappa}^2 \\ & \times\left[(\rho+p)D^b\langle\hat{\sigma}_{kb}\rangle+\langle\hat{K}+\frac{\hat{\Theta}}{3}\rangle D^b\pi_{kb}-\frac{2(\rho+p)}{3}D_k\langle\hat{\Theta}\rangle-\frac{2}{3}\langle\hat{K}+\frac{\hat{\Theta}}{3}\rangle D_k\rho-2q^aD_k\langle\hat{K}_a\rangle\right. \\ & -2\langle\hat{K}^a\rangle D_kq_a+q^aD_a\langle\hat{K}_k\rangle+\langle\hat{K}^a\rangle D_aq_k+\frac{\langle\hat{K}_k\rangle}{3}D^aq_a-\pi^{ab}D_k\langle\hat{\sigma}_{ab}\rangle-\langle\hat{\sigma}^{ab}\rangle D_k\pi_{ab} \\ & +\pi^{ab}D_b\langle\hat{\sigma}_{ka}\rangle+\langle\hat{\sigma}_b{}^a\rangle D^b\pi_{ka}+\frac{\pi_k{}^a}{3}D_a\langle\hat{\Theta}\rangle+\frac{\langle\hat{\sigma}_k{}^a\rangle}{3}D_a\rho-\dot{\pi}_{\langle ka}\rangle\langle\hat{K}^a\rangle+q^a\langle\dot{\hat{\sigma}}_{\langle ka}\rangle\rangle+q^a\sigma_{ck}\langle\hat{\sigma}_a{}^c\rangle \\ & -\sigma_{ck}\pi_a{}^c\langle\hat{K}^a\rangle-\frac{2(\rho+p)}{3}\Theta\langle\hat{K}_k\rangle+\frac{2\Theta}{3}\langle\hat{K}+\frac{\hat{\Theta}}{3}\rangle q_k-2q^aA_{\langle k}\langle\hat{K}_a\rangle\rangle-2A_{\langle k}q_a\rangle\langle\hat{K}^a\rangle+\sigma_{ba}\pi_k{}^b\langle\hat{K}^a\rangle \\ & -\sigma_{ba}q^a\langle\hat{\sigma}_k{}^b\rangle+\frac{2}{3}q_k\sigma_{ab}\langle\hat{\sigma}^{ab}\rangle-\frac{2}{3}\sigma_{ab}\pi^{ab}\langle\hat{K}_k\rangle+\varepsilon_{cab}q^a\omega^b\langle\hat{\sigma}_k{}^c\rangle-\varepsilon_{cab}\omega^b\pi_k{}^c\langle\hat{K}^a\rangle+\varepsilon_k{}^{ab}q_c\omega_a\langle\hat{\sigma}_b{}^c\rangle \\ & -\varepsilon_k{}^{ab}\omega_a\pi_b{}^c\langle\hat{K}_c\rangle-\frac{2}{3}\Delta\tilde{\pi}'_{\langle k\rangle}+\frac{1}{6}D_k\Delta(\tilde{\rho}+3\tilde{\pi}-3\tilde{p})+\frac{2\tilde{\kappa}^2}{9}(2\lambda-\rho-3p)\langle\tilde{\pi}_k\rangle+\frac{2}{3}\langle\hat{K}-\frac{\hat{\Theta}}{3}\rangle\Delta\tilde{\pi}_k \\ & +\frac{q_k}{3}D^a\langle\hat{K}_a\rangle-\frac{2\langle\tilde{q}_k\rangle}{3}\Delta K-\frac{2\langle K\rangle}{3}\Delta\tilde{q}_k-\frac{2}{3}\langle 2\hat{K}_k+K_k\rangle\Delta\tilde{q}-\frac{2\langle\tilde{q}\rangle}{3}(2\tilde{\kappa}^2q_k+\Delta K_k)+\frac{2\langle\hat{A}\rangle}{3}\Delta\tilde{\pi}_{ka} \\ & \left.+\frac{2\langle\tilde{\pi}_{ka}\rangle}{3}\Delta\hat{A}^a-\frac{2\langle\hat{A}_k\rangle}{3}\Delta(\tilde{\pi}-\tilde{p})-\frac{2\langle\tilde{\pi}-\tilde{p}\rangle}{3}\Delta\hat{A}_k+\frac{5\tilde{\kappa}^2}{3}\pi_{ka}\langle\tilde{\pi}^a\rangle-\frac{5\langle\hat{\sigma}_{ka}\rangle}{3}\Delta\tilde{\pi}^a\right], \quad (2.103) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = & \Delta\hat{\mathcal{E}}_{\langle kj\rangle}-D_{\langle k}\Delta\hat{\mathcal{E}}_{j\rangle}+\frac{\Theta}{3}\Delta\hat{\mathcal{E}}_{kj}-2A_{\langle k}\Delta\hat{\mathcal{E}}_{j\rangle}+\frac{4\sigma_{kj}}{3}\Delta\mathcal{E}-(\omega_{a\langle k}-\sigma_{a\langle k})\Delta\hat{\mathcal{E}}_{j\rangle}^a+\tilde{\kappa}^2\left[\frac{2\langle\hat{\Theta}\rangle}{3}D_{\langle k}q_{j\rangle}\right. \\ & -\langle\hat{K}-\frac{\hat{\Theta}}{3}\rangle\pi_{kj}-2\pi_{\langle j}{}^a\langle\dot{\hat{\sigma}}_{k\rangle a}\rangle-2\langle\hat{\sigma}_{\langle j}{}^a\rangle\dot{\pi}_{k\rangle a}-\frac{(\rho+3p)}{3}\langle\hat{\sigma}_{kj}\rangle-2q_{\langle k}D_{j\rangle}\langle\hat{K}-\hat{\Theta}\rangle-\frac{2\langle\hat{K}_{\langle k}\rangle}{3}D_{j\rangle}(\rho-3p) \\ & +\pi_{\langle j}{}^aD_{k\rangle}\langle\hat{K}_a\rangle-\langle\hat{\sigma}_{\langle j}{}^a\rangle D_{k\rangle}q_a-2q_{\langle k}D^b\langle\hat{\sigma}_{j\rangle b}\rangle+2\langle\hat{K}_{\langle k}\rangle D^b\pi_{j\rangle b}+\langle\hat{K}^a\rangle D_{\langle k}\pi_{j\rangle a}+\frac{14\Theta}{3}q_{\langle k}\langle\hat{K}_{j\rangle}\rangle \\ & -\langle\hat{K}-\frac{\hat{\Theta}}{3}\rangle\left[\dot{\pi}_{\langle kj\rangle}+\frac{\Theta}{3}\pi_{kj}+\pi_{\langle k}{}^a(\omega_{j\rangle a}+\sigma_{j\rangle a})+2q_{\langle k}A_{j\rangle}\right]-\pi_{a\langle j}\omega_{k\rangle c}\langle\hat{\sigma}^{ac}\rangle+q_{\langle k}\sigma_{j\rangle b}\langle\hat{K}^b\rangle \\ & +\frac{(2\lambda-\rho-3p)}{3}\left[\langle\dot{\hat{\sigma}}_{\langle kj\rangle}\rangle+\frac{\Theta}{3}\langle\hat{\sigma}_{kj}\rangle+\langle\hat{\sigma}_{\langle k}{}^a\rangle(\omega_{j\rangle a}+\sigma_{j\rangle a})-2\langle\hat{K}_{\langle k}\rangle A_{j\rangle}\right]+\frac{2(\rho+p)}{3}\langle\hat{\Theta}\rangle\sigma_{kj} \\ & +\langle\hat{K}_{\langle k}\rangle\sigma_{j\rangle b}q^b-\frac{2\Theta}{3}\pi_{\langle j}{}^a\langle\hat{\sigma}_{k\rangle a}\rangle-\frac{2(\lambda+\rho)}{3}\left[D_{\langle k}\langle\hat{K}_{j\rangle}\rangle-\langle\hat{K}+\frac{\hat{\Theta}}{3}\rangle\sigma_{kj}\right]-q_aD_{\langle k}\langle\hat{\sigma}_{j\rangle}^a\rangle-\langle\hat{\sigma}_{a\langle j}\rangle\omega_{k\rangle c}\pi^{ac} \\ & +2\sigma_{jk}q^a\langle\hat{K}_a\rangle-3q_{\langle k}\omega_{j\rangle a}\langle\hat{K}^a\rangle-3\langle\hat{K}_{\langle k}\rangle\omega_{j\rangle a}q^a-2q_{\langle k}\langle\hat{\sigma}_{j\rangle a}\rangle A^a+2\langle\hat{K}_{\langle k}\rangle\pi_{j\rangle a}A^a+2\pi_{a\langle j}A_{k\rangle}\langle\hat{K}^a\rangle \\ & -2\langle\hat{\sigma}_{a\langle j}\rangle A_{k\rangle}q^a-\pi^{ca}\langle\hat{\sigma}_{c\langle k}\rangle\sigma_{j\rangle a}-\langle\hat{\sigma}^{ca}\rangle\pi_{c\langle k}\sigma_{j\rangle a}+\frac{2}{3}\Delta\dot{\tilde{\pi}}_{\langle kj\rangle}+\frac{8A_{\langle k}}{3}\Delta\tilde{q}_j+\frac{2}{3}D_{\langle k}\Delta\tilde{q}_j \\ & -\frac{2\langle\hat{K}_{\langle k}\rangle}{3}\Delta\tilde{\pi}_{j\rangle}-\frac{2\tilde{\kappa}^2}{3}\langle\tilde{\pi}_{\langle k}\rangle q_{j\rangle}+\frac{2[\Delta(\tilde{\rho}+\tilde{p})]}{3}\sigma_{jk}+\frac{2\Theta}{9}\Delta\tilde{\pi}_{jk}-\frac{2}{3}(\omega_{a\langle k}-\sigma_{a\langle k})\Delta\tilde{\pi}_{j\rangle}^a\Big], \quad (2.104) \end{aligned}$$

és kényszerek:

$$0 = \frac{\tilde{\kappa}^2}{6}(2\lambda-\rho-3p)\langle\hat{\sigma}_{ab}\rangle-\frac{\tilde{\kappa}^2}{2}\langle\hat{K}-\frac{\hat{\Theta}}{3}\rangle\pi_{ab}-\tilde{\kappa}^2q_{\langle a}\langle\hat{K}_{b\rangle}\rangle-\tilde{\kappa}^2\pi_{c\langle a}\langle\hat{\sigma}_{b\rangle}^c\rangle+\frac{\Delta\hat{\mathcal{E}}_{ab}}{2}-\frac{\tilde{\kappa}^2}{3}\Delta\tilde{\pi}_{ab}, \quad (2.105)$$

$$0 = \frac{2\tilde{\kappa}^2}{3}(\lambda+\rho)\langle\hat{K}_a\rangle-\frac{2\tilde{\kappa}^2}{3}\langle\hat{\Theta}\rangle q_a-\tilde{\kappa}^2\pi_{ab}\langle\hat{K}^b\rangle+\tilde{\kappa}^2q^b\langle\hat{\sigma}_{ab}\rangle+\Delta\hat{\mathcal{E}}_a+\frac{2\tilde{\kappa}^2}{3}\Delta\tilde{q}_a, \quad (2.106)$$

$$0 = \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} (\lambda - 2\rho - 3p) \langle \hat{\Theta} \rangle - \tilde{\kappa}^2 (\lambda + \rho) \langle \hat{K} \rangle - 2\tilde{\kappa}^2 q^a \langle \hat{K}_a \rangle - \Delta \mathcal{E} - \frac{\Delta \tilde{\Lambda}}{2} + \frac{\tilde{\kappa}^2}{2} \Delta (\tilde{\rho} + \tilde{\pi} + \tilde{p}) , \quad (2.107)$$

$$\begin{aligned} 0 = & D^a \Delta \hat{\mathcal{E}}_{ak} - \frac{2}{3} D_k \Delta \mathcal{E} - \frac{2\Theta}{3} \Delta \hat{\mathcal{E}}_k + (3\omega_{ka} + \sigma_{ka}) \Delta \hat{\mathcal{E}}^a + \tilde{\kappa}^2 \left[\frac{4(\lambda + \rho)}{9} D_k \langle \hat{\Theta} \rangle - \frac{4}{9} \langle \hat{\Theta} \rangle D_k \rho \right. \\ & - \pi_{ak} D^a \langle \hat{K} - \frac{\hat{\Theta}}{3} \rangle - \frac{\langle \hat{\sigma}_{ak} \rangle}{3} D^a (\rho + 3p) + \frac{(2\lambda - \rho - 3p)}{3} D^a \langle \hat{\sigma}_{ak} \rangle - \langle \hat{K} - \frac{\hat{\Theta}}{3} \rangle D^a \pi_{ak} - \pi_a^c D^a \langle \hat{\sigma}_{ck} \rangle \\ & - \langle \hat{\sigma}_a^c \rangle D^a \pi_{ck} + \frac{4\pi^{ab}}{3} D_k \langle \hat{\sigma}_{ab} \rangle + \frac{4\langle \hat{\sigma}^{ab} \rangle}{3} D_k \pi_{ab} - \pi_{kb} D^a \langle \hat{\sigma}_a^b \rangle + 3\varepsilon_k^{ad} \left[\langle \hat{K}^c \rangle \omega_a \pi_{cd} - q^c \omega_a \langle \hat{\sigma}_{cd} \rangle \right] \\ & - q_a D^a \langle \hat{K}_k \rangle - \pi_a^b \langle \hat{K}^a \rangle \sigma_{kb} - \langle \hat{K}_a \rangle D^a q_k - q_k D^a \langle \hat{K}_a \rangle - \langle \hat{K}_k \rangle D^a q_a - \langle \hat{\sigma}_{kb} \rangle D^a \pi_a^b \\ & + \frac{2q^a}{3} D_k \langle \hat{K}_a \rangle + \frac{2\langle \hat{K}^a \rangle}{3} D_k q_a + \langle \hat{\sigma}_a^b \rangle q^a \sigma_{kb} + \langle \hat{\Theta} \rangle \left[\frac{4\Theta}{9} q_k - \frac{2}{3} \sigma_{kb} q^b - 2\varepsilon_k^{cd} q_c \omega_d \right] \\ & - \frac{2(\lambda + \rho)}{3} \left[\frac{2\Theta}{3} \langle \hat{K}_k \rangle - \sigma_{kb} \langle \hat{K}^b \rangle - 3\varepsilon_k^{cd} \langle \hat{K}_c \rangle \omega_d \right] + \frac{2\Theta}{3} \pi_{ak} \langle \hat{K}^a \rangle - \frac{2\Theta}{3} \langle \hat{\sigma}_{ak} \rangle q^a \\ & \left. - \frac{2}{3} D^a \Delta \tilde{\pi}_{ak} + \frac{1}{3} D_k \Delta (\tilde{\rho} - \tilde{\pi} + \tilde{p}) - \frac{4\Theta}{9} \Delta \tilde{q}_k + \frac{2}{3} (3\omega_{ka} + \sigma_{ka}) \Delta \tilde{q}^a \right] , \quad (2.108) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = & \varepsilon_{ab\langle k} D^a \Delta \hat{\mathcal{E}}_{j\rangle}^b - \varepsilon_{\langle k}^{ab} \sigma_{j\rangle a} \Delta \hat{\mathcal{E}}_b - 3\omega_{\langle k} \Delta \hat{\mathcal{E}}_{j\rangle} + \tilde{\kappa}^2 \varepsilon_{\langle k}^{ab} \left[\pi_{j\rangle a} D_b \langle \hat{K} - \frac{\hat{\Theta}}{3} \rangle + \frac{\langle \hat{\sigma}_{j\rangle a} \rangle}{3} D_b (\rho + 3p) \right. \\ & \left. - \sigma_{j\rangle b} \pi_{ca} \langle \hat{K}^c \rangle + \sigma_{j\rangle b} \langle \hat{\sigma}_{ca} \rangle q^c - \frac{2(\lambda + \rho)}{3} \sigma_{j\rangle a} \langle \hat{K}_b \rangle + \frac{2\langle \hat{\Theta} \rangle}{3} \sigma_{j\rangle a} q_b - \frac{2\sigma_{j\rangle a}}{3} \Delta \tilde{q}_b \right] \\ & + \tilde{\kappa}^2 \varepsilon_{ab\langle k} \left[\frac{(2\lambda - \rho - 3p)}{3} D^a \langle \hat{\sigma}_{j\rangle}^b \rangle - \langle \hat{K} - \frac{\hat{\Theta}}{3} \rangle D^a \pi_{j\rangle}^b - D^a \pi_{j\rangle c} \langle \hat{\sigma}^{cb} \rangle - D^a \langle \hat{\sigma}_{j\rangle c} \rangle \pi^{cb} \right. \\ & \left. - \pi_{j\rangle c} D^a \langle \hat{\sigma}^{cb} \rangle - \langle \hat{\sigma}_{j\rangle c} \rangle D^a \pi^{cb} - q_{j\rangle} D^a \langle \hat{K}^b \rangle - \langle \hat{K}_{j\rangle} \rangle D^a q^b - q^b D^a \langle \hat{K}_{j\rangle} \rangle - \langle \hat{K}^b \rangle D^a q_{j\rangle} \right. \\ & \left. - \frac{2}{3} D^a \Delta \tilde{\pi}_{j\rangle}^b \right] + \tilde{\kappa}^2 \omega_{\langle k} \left[3\pi_{j\rangle a} \langle \hat{K}^a \rangle - 3\langle \hat{\sigma}_{j\rangle a} \rangle q^a - 2(\lambda + \rho) \langle \hat{K}_{j\rangle} \rangle + 2\langle \hat{\Theta} \rangle q_{j\rangle} - 2\Delta \tilde{q}_{j\rangle} \right] , \quad (2.109) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = & \varepsilon_k^{ab} D_a \Delta \hat{\mathcal{E}}_b - \frac{8\omega_k}{3} \Delta \mathcal{E} + \omega^a \Delta \hat{\mathcal{E}}_{ak} + \varepsilon_k^{ab} \sigma_b^c \Delta \hat{\mathcal{E}}_{ac} + \tilde{\kappa}^2 \left[\frac{2}{3} \varepsilon_k^{ab} \langle \hat{K}_b \rangle D_a \rho - \frac{2}{3} \varepsilon_k^{ab} q_b D_a \langle \hat{\Theta} \rangle \right. \\ & + \frac{2(\lambda + \rho)}{3} \varepsilon_k^{ab} D_a \langle \hat{K}_b \rangle - \frac{2\langle \hat{\Theta} \rangle}{3} \varepsilon_k^{ab} D_a q_b - \varepsilon_{abk} q^c D^b \langle \hat{\sigma}_c^a \rangle + \varepsilon_{abk} \langle \hat{K}^c \rangle D^b \pi_c^a + \varepsilon_k^{ab} \pi_a^c D_b \langle \hat{K}_c \rangle \\ & - \varepsilon_k^{ab} \langle \hat{\sigma}_a^c \rangle D_b q_c + \frac{(2\lambda - \rho - 3p)}{3} [\langle \hat{\sigma}_{ck} \rangle \omega^c + \varepsilon_k^{ab} \langle \hat{\sigma}_{ac} \rangle \sigma_b^c] - \langle \hat{K} - \frac{\hat{\Theta}}{3} \rangle [\pi_{ck} \omega^c + \varepsilon_k^{ab} \pi_{ac} \sigma_b^c] \\ & \left. - \left[\frac{4(\lambda + \rho)}{3} \langle \hat{K} + \frac{\hat{\Theta}}{3} \rangle + \frac{4(\rho + p)}{3} \langle \hat{\Theta} \rangle + 2q_a \langle \hat{K}^a \rangle - 2\pi_{ab} \langle \hat{\sigma}^{ab} \rangle \right] \omega_k - q^c \omega_c \langle \hat{K}_k \rangle - \langle \hat{K}^c \rangle \omega_c q_k \right. \\ & + \varepsilon_k^{ac} \sigma_{ab} q^b \langle \hat{K}_c \rangle + \varepsilon_k^{ac} \sigma_{ab} \langle \hat{K}^b \rangle q_c - \pi_{ca} \langle \hat{\sigma}_k^c \rangle \omega^a - \langle \hat{\sigma}_{ca} \rangle \pi_k^c \omega^a - \varepsilon_k^{ab} \pi_{da} \langle \hat{\sigma}^{cd} \rangle \sigma_{cb} - \varepsilon_k^{ab} \langle \hat{\sigma}_{da} \rangle \pi^{cd} \sigma_{cb} \\ & \left. - \frac{2\omega^a}{3} \Delta \tilde{\pi}_{ka} + \frac{2}{3} \varepsilon_k^{ab} D_a \Delta \tilde{q}_b + \frac{4\omega_k}{3} \Delta (\tilde{\rho} + \tilde{p}) - \frac{2}{3} \varepsilon_k^{ab} \sigma_{bc} \Delta \tilde{\pi}_a^c \right] . \quad (2.110) \end{aligned}$$

A (2.87), (2.97) és (2.98), változatlan alakúak az B.3 melléklet ugyanezen egyenleteihez képest. Az egyenletek átlagai önmaguk, különbségük nulla.

Gravitációs evolúciós és kényszer egyenletek egy szimmetrikusan beágyazott bránon

Ebben az alfejezetben a 2.1.7. alfejezetben felsorolt egyenleteket specifikálom *szimmetrikusan beágyazott* bránra. \mathcal{Z}_2 -szimmetrikus beágyazásról akkor beszélünk, amikor a brán két oldalán

lévő 5d téridő régiók között tökéletes tükörszimmetria van. Ebben az esetben a brán két oldalán a külső görbület ellentétes, mivel a brán normál vektora előjelet vált. Így $\Delta^{(4)}K_{ab} = 2^{(4)}K_{ab}$ és $\overline{K}_{ab} = 0$. A normál vektor előjel váltása miatt azon mennyiségek esetében, melyek definícióiban n^a páros számszor (páratlan számszor) jelenik meg: $\Delta f = 2f$, $\langle f \rangle = 0$ ($\Delta f = 0$, $\langle f \rangle = f$). Az összes általános relativisztikus járuléka az egyenletek baloldalán található. A kapott egyenletrendszer:

$$\dot{\rho} + D^a q_a + (\rho + p) \Theta + 2q^a A_a + \pi_{ab} \sigma^{ab} = -2\tilde{q}, \quad (2.111)$$

$$\dot{q}_{\langle a} + D_a p + D^b \pi_{ab} + \frac{4\Theta}{3} q_a + (\rho + p) A_a + \pi_{ab} A^b - \omega_{ab} q^b + \sigma_{ab} q^b = -2\tilde{\pi}_a, \quad (2.112)$$

$$\begin{aligned} 0 = & \dot{\mathcal{E}} - D^a \hat{\mathcal{E}}_a + \frac{4}{3} \Theta \mathcal{E} + \hat{\mathcal{E}}_{ab} \sigma^{ab} - 2\hat{\mathcal{E}}_a A^a + \frac{\tilde{\kappa}^4}{4} \left[\pi^{ab} \pi_{\langle ab} + \pi^{ab} D_a q_b + q^a D^b \pi_{ab} - \frac{2}{3} q^a D_a \rho \right. \\ & \left. + 2A_b q_a \pi^{ab} + \frac{\Theta}{3} \pi_{ab} \pi^{ab} + (\rho + p) \sigma_{ab} \pi^{ab} + \sigma_{ca} \pi_b^c \pi^{ab} + \frac{2\Theta}{3} q_a q^a - \sigma_{ab} q^a q^b \right] \\ & - \frac{\tilde{\kappa}^2}{2} (\tilde{\rho} - \tilde{\pi} + \tilde{p}) - \frac{2\tilde{\kappa}^2}{3} D^a \tilde{q}_a - \frac{2\tilde{\kappa}^2 \Theta}{3} (\tilde{\rho} + \tilde{p}) + 2\kappa^2 \tilde{q} + \frac{\tilde{\kappa}^4 \tilde{\rho}}{3} - \frac{4\tilde{\kappa}^2}{3} \tilde{q}_a A^a - \frac{2\tilde{\kappa}^2 \sigma^{ab}}{3} \tilde{\pi}_{ab} \end{aligned} \quad (2.113)$$

$$\begin{aligned} 0 = & \dot{\hat{\mathcal{E}}}_{\langle k} + \frac{4}{3} \Theta \hat{\mathcal{E}}_k - \frac{1}{3} D_k \mathcal{E} - \frac{4\mathcal{E}}{3} A_k - D^a \hat{\mathcal{E}}_{ka} - \hat{\mathcal{E}}_{ka} A^a - (\omega_{ka} - \sigma_{ka}) \hat{\mathcal{E}}^a \\ & + \frac{\tilde{\kappa}^4}{4} \left[-\pi_{\langle ka} q^a - (\rho + p) D^b \pi_{kb} - q^a \sigma_{ck} \pi_a^c + \frac{2}{3} (\rho + p) D_k \rho - \frac{2\Theta}{3} (\rho + p) q_k \right. \\ & - 2q^a D_k q_a + q^a D_a q_k + \frac{1}{3} q_k D^a q_a - 2q^a A_{\langle k} q_{a\rangle} + \sigma_{ba} \pi_k^b q^a - \frac{2}{3} q_k \sigma_{ab} \pi^{ab} \\ & \left. + \pi^{ab} D_k \pi_{ab} - \pi_b^a D^b \pi_{ka} - \frac{1}{3} \pi_k^a D_a \rho - \varepsilon_{cab} q^a \omega^b \pi_k^c - \varepsilon_k^{ab} q_c \omega_a \pi_b^c \right] \\ & + \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} \left[-2\tilde{\pi}'_{\langle k} + \frac{1}{2} D_k (\tilde{\rho} + 3\tilde{\pi} - 3\tilde{p}) + \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} (2\lambda - \rho - 3p) \tilde{\pi}_k - 2K \tilde{q}_k \right. \\ & \left. - \frac{2}{3} \tilde{q} (2\hat{K}_k + K_k) + 2\tilde{\pi}_{ka} \hat{A}^a - 2(\tilde{\pi} - \tilde{p}) \hat{A}_k + \frac{5\tilde{\kappa}^2}{2} \pi_{ka} \tilde{\pi}^a \right], \end{aligned} \quad (2.114)$$

$$\begin{aligned} & \dot{\Theta} - D^a A_a + \frac{\Theta^2}{3} - A^a A_a - 2\omega_a \omega^a + \sigma_{ab} \sigma^{ab} + \frac{\kappa^2}{2} (\rho + 3p) - \Lambda \\ = & \mathcal{E} + \frac{\tilde{\kappa}^4}{4} q^a q_a - \frac{\tilde{\kappa}^4}{12} \rho (2\rho + 3p) - \frac{\tilde{\kappa}^2}{2} (\tilde{\rho} + \tilde{\pi} + \tilde{p}), \end{aligned} \quad (2.115)$$

$$\dot{\omega}_{\langle a} - \frac{1}{2} \varepsilon_a^{cd} D_c A_d + \frac{2\Theta}{3} \omega_a - \sigma_{ab} \omega^b = 0, \quad (2.116)$$

$$\begin{aligned} & \dot{\sigma}_{\langle ab} - D_{\langle a} A_{b\rangle} + \frac{2\Theta}{3} \sigma_{ab} - A_{\langle a} A_{b\rangle} + \omega_{\langle a} \omega_{b\rangle} + \sigma_{c\langle a} \sigma_{b\rangle}^c + E_{ab} - \frac{\kappa^2}{2} \pi_{ab} \\ = & \frac{\tilde{\kappa}^4}{8} q_{\langle a} q_{b\rangle} - \frac{\tilde{\kappa}^4}{8} \pi_{c\langle a} \pi_{b\rangle}^c - \frac{\tilde{\kappa}^4}{24} (\rho + 3p) \pi_{ab} - \frac{1}{2} \hat{\mathcal{E}}_{ab} + \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} \tilde{\pi}_{ab}, \end{aligned} \quad (2.117)$$

$$D^b \sigma_{ab} - \frac{2}{3} D_a \Theta + \varepsilon_a^{ck} D_c \omega_k + 2\varepsilon_a^{ck} A_c \omega_k + \kappa^2 q_a = -\frac{\tilde{\kappa}^4}{6} \rho q_a + \frac{\tilde{\kappa}^4}{4} \pi_{ab} q^b - \hat{\mathcal{E}}_a - \frac{2\tilde{\kappa}^2}{3} \tilde{q}_a, \quad (2.118)$$

$$\begin{aligned}
& \dot{E}_{\langle kj \rangle} - \varepsilon_{ab\langle k} D^a H_j \rangle^b + \Theta E_{kj} + E^a_{\langle k} (\omega_j \rangle_a - 3\sigma_j \rangle_a) + 2\varepsilon_{\langle k}{}^{ab} H_j \rangle_a A_b \\
& + \frac{\kappa^2}{2} \left[\dot{\pi}_{\langle kj \rangle} + D_{\langle k} q_j \rangle + (\rho + p) \sigma_{kj} + 2q_{\langle k} A_j \rangle + \frac{\Theta}{3} \pi_{kj} + \pi_{\langle k}{}^a (\omega_j \rangle_a + \sigma_j \rangle_a) \right] \\
= & \frac{1}{2} \hat{\mathcal{E}}_{\langle kj \rangle} - \frac{1}{2} D_{\langle k} \hat{\mathcal{E}}_j \rangle + \frac{1}{2} \hat{\mathcal{E}}_{\langle j}{}^a (\omega_k \rangle_a + \sigma_k \rangle_a) + \frac{\Theta}{6} \hat{\mathcal{E}}_{kj} - \hat{\mathcal{E}}_{\langle k} A_j \rangle + \frac{2\mathcal{E}}{3} \sigma_{kj} \\
& + \frac{\tilde{\kappa}^4}{24} \left[(\rho + 3p) \dot{\pi}_{\langle kj \rangle} + 6\pi_{\langle j}{}^a \dot{\pi}_k \rangle_a + (\rho + 3p) \pi_{kj} - 2q_{\langle k} D_j \rangle (\rho - 3p) - 2\rho D_{\langle k} q_j \rangle + 3\pi_{\langle j}{}^a D_k \rangle q_a \right. \\
& + 6q_{\langle k} D^b \pi_j \rangle_b + 3q_a D_{\langle k} \pi_j \rangle^a - 2\rho (\rho + p) \sigma_{kj} + 7\Theta q_{\langle k} q_j \rangle + 2(\rho + 3p) q_{\langle k} A_j \rangle + \Theta \pi_{\langle j}{}^a \pi_k \rangle_a \\
& + \frac{\Theta}{3} (\rho + 3p) \pi_{kj} + (\rho + 3p) \pi_{\langle k}{}^a (\omega_j \rangle_a + \sigma_j \rangle_a) + 3q_{\langle k} \sigma_j \rangle_b q^b + 3\pi_{\langle j}{}^a \omega_k \rangle_c \pi_a{}^c + 3\sigma_{jk} q^a q_a \\
& \left. - 9q_{\langle k} \omega_j \rangle_a q^a + 6q_{\langle k} \pi_j \rangle_a A^a + 6\pi_{a\langle j} A_k \rangle q^a + 3\pi_c{}^a \pi_{\langle k}{}^c \sigma_j \rangle_a \right] \\
& + \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} \left[\dot{\tilde{\pi}}_{\langle kj \rangle} + D_{\langle k} \tilde{q}_j \rangle - \frac{\tilde{\kappa}^2}{2} \tilde{\pi}_{\langle k} q_j \rangle + 4\tilde{q}_{\langle k} A_j \rangle + (\tilde{\rho} + \tilde{p}) \sigma_{jk} + \frac{\Theta}{3} \tilde{\pi}_{jk} + \tilde{\pi}_{\langle j}{}^a (\omega_k \rangle_a + \sigma_k \rangle_a) \right], \quad (2.119)
\end{aligned}$$

$$D_{\langle c} \omega_k \rangle + \varepsilon_{ab\langle k} D^b \sigma_c \rangle^a + 2A_{\langle c} \omega_k \rangle + H_{ab} = 0, \quad (2.120)$$

$$D^a \omega_a - A_a \omega^a = 0, \quad (2.121)$$

$$\begin{aligned}
& \dot{H}_{\langle kj \rangle} + \varepsilon_{ab\langle k} D^a E_j \rangle^b + \Theta H_{kj} - 3\sigma_{a\langle k} H_j \rangle^a - \omega_{a\langle k} H_j \rangle^a - 2\varepsilon_{\langle k}{}^{ab} E_j \rangle_a A_b \\
& - \frac{\kappa^2}{2} (\varepsilon_{ab\langle k} D^a \pi_j \rangle^b + 3\omega_{\langle k} q_j \rangle + \varepsilon_{\langle k}{}^{ab} \sigma_j \rangle_a q_b) \\
= & -\frac{1}{2} \varepsilon_{ab\langle k} D^a \hat{\mathcal{E}}_j \rangle^b + \frac{1}{2} \varepsilon_{\langle k}{}^{ab} \sigma_j \rangle_a \hat{\mathcal{E}}_b + \frac{3}{2} \hat{\mathcal{E}}_{\langle j} \omega_k \rangle + \frac{\tilde{\kappa}^4}{24} \left[\varepsilon_{\langle k}{}^{cd} \pi_j \rangle_c D_d (\rho + 3p) \right. \\
& - (\rho + 3p) \varepsilon_{ab\langle k} D^a \pi_j \rangle^b - 3\varepsilon_{ab\langle k} D^a \pi_j \rangle_c \pi^{cb} - 3\varepsilon_{ab\langle k} \pi_j \rangle_c D^a \pi^{cb} + 6\rho \omega_{\langle k} q_j \rangle \\
& + 2\rho \varepsilon_{\langle k}{}^{ab} \sigma_j \rangle_a q_b + 3\varepsilon_{ab\langle k} q_j \rangle D^a q^b + 3\varepsilon_{ab\langle k} q^b D^a q_j \rangle + 3\varepsilon_{\langle k}{}^{ab} \sigma_j \rangle_b \pi_a{}^c q_c \\
& \left. - 9\pi_{\langle j}{}^a \omega_k \rangle_a q_a \right] + \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} (\varepsilon_{ab\langle k} D^a \tilde{\pi}_j \rangle^b + 3\tilde{q}_{\langle j} \omega_k \rangle + \varepsilon_{\langle k}{}^{ab} \sigma_j \rangle_a \tilde{q}_b), \quad (2.122)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& D^a E_{ak} - 3H_{ka} \omega^a + \varepsilon_k{}^{ab} H_{ac} \sigma_b{}^c + \frac{\kappa^2}{2} \left[-\frac{2}{3} D_k \rho + D^a \pi_{ak} + \frac{2}{3} \Theta q_k - \sigma_{kb} q^b - 3\varepsilon_k{}^{cd} q_c \omega_d \right] \\
= & \frac{1}{2} D^a \hat{\mathcal{E}}_{ak} - \frac{1}{3} D_k \mathcal{E} - \frac{\Theta}{3} \hat{\mathcal{E}}_k + \frac{1}{2} (3\omega_{ka} + \sigma_{ka}) \hat{\mathcal{E}}^a + \frac{\tilde{\kappa}^4}{24} \left[\frac{4}{3} \rho D_k \rho + \pi_{ak} D^a (\rho + 3p) \right. \\
& + (\rho + 3p) D^a \pi_{ak} + 3\pi_a{}^c D^a \pi_{ck} - 4\pi^{ab} D_k \pi_{ab} + 3\pi_{kb} D^a \pi_a{}^b + 2q^a D_k q_a - 3q_a D^a q_k \\
& \left. - 3q_k D^a q_a + 9\varepsilon_k{}^{ad} q_c \omega_a \pi_d{}^c - 3\pi_a{}^b q^a \sigma_{kb} - \frac{4}{3} \rho \Theta q_k + 2\rho \sigma_{kb} q^b + 6\rho \varepsilon_k{}^{cd} q_c \omega_d + 2\Theta \pi_k{}^a q_a \right] \\
& - \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} \left[D^a \tilde{\pi}_{ak} - \frac{1}{2} D_k (\tilde{\rho} - \tilde{\pi} + \tilde{p}) + \frac{2}{3} \Theta \tilde{q}_k - \tilde{q}^a (3\omega_{ka} + \sigma_{ka}) \right], \quad (2.123)
\end{aligned}$$

$$D^a H_{ak} + 3E_{ka} \omega^a - \varepsilon_k{}^{ab} E_{ac} \sigma_b{}^c + \frac{\kappa^2}{2} [\varepsilon_k{}^{ab} D_a q_b + 2(\rho + p) \omega_k - \pi_k{}^c \omega_c - \varepsilon_k{}^{ab} \pi_{ac} \sigma_b{}^c]$$

$$\begin{aligned}
= & -\frac{1}{2}\varepsilon_k^{ab}D_a\widehat{\mathcal{E}}_b + \frac{4\mathcal{E}}{3}\omega_k - \frac{1}{2}\widehat{\mathcal{E}}_{ak}\omega^a - \frac{1}{2}\varepsilon_k^{ab}\widehat{\mathcal{E}}_{ac}\sigma_b^c + \frac{\widetilde{\kappa}^4}{24}\left[3q^c\omega_cq_k - 2\varepsilon_k^{ab}q_bD_a\rho\right. \\
& - 2\rho\varepsilon_k^{ab}D_aq_b - 3\varepsilon_{abk}q^cD^b\pi_c^a - 3\varepsilon_k^{ab}\pi_a^cD_bq_c - 4\rho(\rho+p)\omega_k + 3q_aq^a\omega_k - (\rho+3p)\pi_k^c\omega_c \\
& \left. - 3\varepsilon_k^{ac}\sigma_{ab}q^bq_c + 3\pi_{ab}\pi^{ab}\omega_k - 3\pi_{ca}\pi_k^c\omega^a - (\rho+3p)\varepsilon_k^{ab}\pi_{ac}\sigma_b^c - 3\varepsilon_k^{ab}\pi_{da}\pi_c^d\sigma_b^c\right] \\
& + \frac{\widetilde{\kappa}^2}{3}\left[\widetilde{\pi}_{ka}\omega^a - \varepsilon_k^{ab}D_a\widetilde{q}_b - 2(\widetilde{\rho}+\widetilde{p})\omega_k + \varepsilon_k^{ab}\widetilde{\pi}_a^c\sigma_{bc}\right]. \tag{2.124}
\end{aligned}$$

Itt felhasználásra kerültek a (2.79) és (2.80) definíciók.

A (2.111), (2.112) egyenletek kifejezik az energiasűrűség, illetve az energia fluxus transportját a brán és az 5d téridő között (ezek tartalmazzák $\dot{\rho}$ -ot és $\dot{q}_{\langle a \rangle}$ -ot). 5d források hiányában ezek az egyenletek egyedül a brán anyagra vonatkozó evolúciós egyenletek lesznek. A (2.113) és (2.114) egyenletek hasonló relációkat jelentenek az effektív nem-lokális energiasűrűségre és az effektív nem-lokális energia fluxusra.

Eltűnő 5d anyag esetén a fenti egyenletek a [3] hivatkozás (26)-(29) és az A mellékletében felsorolt egyenleteinek korrigált alakját szolgáltatják.

Mégha a brán beágyazását \mathcal{Z}_2 -szimmetrikusnak is választjuk, és feltesszük $\widetilde{T}_{ab} = 0$ (ennél fogva $0 = \widetilde{\rho} = \widetilde{q} = \widetilde{q}_a = \widetilde{\pi} = \widetilde{\pi}_a = \widetilde{\pi}_{ab} = \widetilde{p}$) a fenti egyenletek nem záródnak a bránon amiatt, hogy nincs bránon zárt evolúciós egyenlet $\widehat{\mathcal{E}}_{ab}$ -re [3]. Szintén nincs evolúciós egyenlet p -re és π_{ab} -re kivéve, ha ez anyagi állapot-egyenlettel adott.

Záródási feltételek

Az általános relativitáselméletbeli 3+1 kovariáns formalizmus ekvivalens az Einstein egyenletekkel, csupán a metrika helyett más változókat használ. Egyenletei záródnak, ha az anyagra valamilyen állapotegyenlet ismert. Ugyanez történik a 3+1+1 brán-világ kovariáns formalizmusban. Állapotegyenlet az 5d energia-impulzus tenzor \widetilde{T}_{ab} reguláris részéből származó folyadékra szükséges.

A 3+1+1 egyenleteinek egy alcsoportjából kiküszöbölhetők a bránra merőleges irányú deriválások. Ezek tekinthetők, mint fejlődési és kényszer egyenletek a bránon. Az egyenleteket a brán általános, illetve tükörszimmetrikus beágyazására a 2.1.7. alfejezet tartalmazza. Nem záródnak még akkor sem, ha a brán anyagra (5d energia-impulzus tenzor disztribucionális részének T_{ab} járuléka) ismert valamilyen állapotegyenlet. Továbbiakban csak a brán szimmetrikus beágyazását tárgyalom.

Az általános relativitáselméletbeli 3+1 kovariáns formalizmusban van 10 gravito-elektromágneses változó 10 fejlődési és 6 kényszer egyenlettel. Szintén van 12 kinematikai változó 9 fejlődési és 15 kényszer egyenlettel. A brán egyenletekben ehhez képest megjelenik pluszban 9 gravito-elektromágneses változó, de csak 4 extra evolúciós egyenlettel. Az extra változók közül $\widehat{\mathcal{E}}_{ab}$ -re nincs fejlődési egyenlet a bránon. Abban a speciális esetben, ha $\widehat{\mathcal{E}}_{ab} = 0$, a brán egyenletek záródnak [3].

Ismerve azonban az evolúciós egyenletek teljes rendszerét az 5-dimenzióban, megadhatók az $\widehat{\mathcal{E}}_{ab} = 0$ -tól eltérő záródási feltételek is. A (2.59) nyújt egy evolúciós egyenletet $\widehat{\mathcal{E}}_{ab}$ -re. Azonban (2.59) tartalmaz olyan mennyiségeket is, amelyek nem jelennek meg a 2.1.7. alfejezetben. Szem előtt tartva, hogy $\widehat{\omega}_{ab} = 0$ a bránon, és kiróva

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}'_{\langle kj \rangle} = & \left(2\widehat{K} - \frac{\widehat{\Theta}}{3}\right)\mathcal{F}_{kj} - \mathcal{F}_{\langle j}^a\widehat{\sigma}_{k \rangle a} + K\widehat{\mathcal{E}}_{kj} + K\mathcal{E}_{kj} - \mathcal{E}_{\langle j}\left(\frac{3}{2}K_{k \rangle} + L_{k \rangle} - \widehat{K}_{k \rangle}\right) \\
& + \frac{3}{2}\widehat{\mathcal{E}}_{\langle k}\widehat{A}_{j \rangle} - \varepsilon_{\langle k}^{ab}\widehat{\mathcal{H}}_{j \rangle a}\left(K_b - 2\widehat{K}_b\right) - \varepsilon_{\langle j}^{ab}\mathcal{H}_{k \rangle a}\widehat{A}_b + \frac{3}{2}\varepsilon_{\langle j}^{ab}\widehat{\sigma}_{k \rangle a}\mathcal{H}_b \tag{2.125}
\end{aligned}$$

feltételt, (2.59) a következő alakra egyszerűsödik:

$$0 = \dot{\hat{\mathcal{E}}}_{\langle kj \rangle} - D_{\langle k} \hat{\mathcal{E}}_{j \rangle} + \frac{\Theta}{3} \hat{\mathcal{E}}_{kj} + \frac{4\mathcal{E}}{3} \sigma_{kj} - 2\hat{\mathcal{E}}_{\langle k} A_{j \rangle} + \hat{\mathcal{E}}_{\langle j}^a (\omega_{k \rangle a} + \sigma_{k \rangle a}) + \mathcal{M}_{kj} , \quad (2.126)$$

ahol az 5d anyag járuléka

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{kj} = & \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} \dot{\tilde{\pi}}_{\langle kj \rangle} + \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} D_{\langle k} \tilde{q}_{j \rangle} + \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} (\tilde{\rho} + \tilde{p}) \sigma_{kj} + \frac{\tilde{\kappa}^2 \tilde{q}}{3} \hat{\sigma}_{kj} + \frac{\tilde{\kappa}^2 \Theta}{9} \tilde{\pi}_{kj} \\ & + \frac{2\tilde{\kappa}^2}{3} \tilde{q}_{\langle j} A_{k \rangle} + \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} \tilde{\pi}_{\langle j} (2\hat{K}_{k \rangle} + L_{k \rangle}) + \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} \tilde{\pi}_{\langle j}^a (\omega_{k \rangle a} + \sigma_{k \rangle a}) . \end{aligned} \quad (2.127)$$

Egy partikuláris megoldása (2.125)-nek

$$\mathcal{F}_{kj} = \hat{\mathcal{H}}_{kj} = \mathcal{E}_j = \mathcal{H}_j = K = \hat{A}_j = 0 . \quad (2.128)$$

A fenti mennyiségek egyike sem jelenik meg a 2.1.7. alfejezet brán egyenleteiben, ezért őket a (2.128) feltétel kiróvása nem változtatja meg. A bránegyenletek pedig, hozzájuk véve (2.126)-ot, időfejlődés szempontjából zárttá válnak.

A Friedmann bránt tartalmazó 5d Schwarzschild-Anti-de Sitter téridő egy olyan példa, amely kielégíti (2.126)-et és (2.128)-et. Ebben az esetben $\mathcal{M}_{ab} = 0 = K$, és

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{E}_a = \hat{\mathcal{E}}_a = \mathcal{H}_a = L_a = K_a = \hat{K}_a = \omega_a = \hat{\omega}_a = A_a = \hat{A}_a , \\ 0 &= \mathcal{E}_{ab} = \mathcal{F}_{ab} = \mathcal{H}_{ab} = \hat{\mathcal{E}}_{ab} = \hat{\mathcal{H}}_{ab} = \sigma_{ab} = \hat{\sigma}_{ab} . \end{aligned} \quad (2.129)$$

Természetesen mivel $\hat{\mathcal{E}}_{ab} = 0$, így ez a korábban ismert triviális záródási feltételt is teljesíti. Kiemelném ugyanakkor, hogy (2.126) egyenlet, ami zárja a brán egyenleteket, több lehetséges megoldást enged $\hat{\mathcal{E}}_{ab}$ -ra mint a triviálist. A 2.2. fejezetben látni fogunk egy olyan példát, ahol $\hat{\mathcal{E}}_{ab} \neq 0$, de (2.126) teljesül a bránon.

2.1.8. Kozmológia

Tökéletes folyadékkal kitöltött Friedmann brán

Feltéve a brán tökéletes folyadékkal kitöltött Friedmann univerzum: $\omega_a = 0 = \sigma_{ab} = \Delta \hat{\sigma}_{ab}$ és $\mathcal{R} = 6k/a^2$, ahol a a skálafaktor. Továbbá $\Theta/3 = H \equiv \dot{a}/a$, ahol H a Hubble paraméter. A (2.26) egyenlet bránon vett átlaga adja a Friedmann egyenletet, (2.86) pedig a Raychaudhuri és (2.100) az energia mérleg egyenlet, melyek jelen esetben:

$$\begin{aligned} 3 \left(H^2 + \frac{k}{a^2} \right) &= \Lambda + \kappa^2 \rho \left(1 + \frac{\rho}{2\lambda} \right) - \langle \mathcal{E} \rangle \\ &+ \frac{\langle \hat{\Theta} \rangle^2}{3} - \frac{1}{2} \langle \hat{\sigma}_{ab} \rangle \langle \hat{\sigma}^{ab} \rangle + \frac{\tilde{\kappa}^2}{2} \langle \tilde{\rho} + \tilde{p} - \tilde{\pi} \rangle , \end{aligned} \quad (2.130)$$

$$\begin{aligned} 3 \left(\dot{H} + H^2 \right) + \frac{\kappa^2}{2} (\rho + 3p) - \Lambda &= \langle \mathcal{E} \rangle - \frac{\tilde{\kappa}^4 \rho}{12} (2\rho + 3p) + \frac{\tilde{\kappa}^4}{4} q_a q^a \\ &- \langle \hat{\Theta} \rangle \langle \hat{K} \rangle + \langle \hat{K}_a \rangle \langle \hat{K}^a \rangle - \frac{\tilde{\kappa}^2}{2} \langle \tilde{\rho} + \tilde{\pi} + \tilde{p} \rangle , \end{aligned} \quad (2.131)$$

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = -\Delta \tilde{q} . \quad (2.132)$$

Szimmetrikus beágyazás esetén $\langle \hat{\Theta} \rangle = 0 = \langle \hat{\sigma}_{ab} \rangle$. Általános beágyazásra (2.130) átírható a következő alakba:

2.1. táblázat. A kinematikai mennyiségek megfeleltetései a 3+1+1 és a 2+1+1 kovariáns formalizmusok között.

$n_a \rightarrow e_a$	$K \rightarrow \frac{1}{3}\Theta + \Sigma$	$\widehat{K} \rightarrow -A$
$A_a \rightarrow A_a$	$K_a \rightarrow \Sigma_a + \varepsilon_{ab}\Omega^b$	$\widehat{K}_a \rightarrow \alpha_a$
$\widehat{A}_a \rightarrow a_a$	$\Theta \rightarrow \Theta - \frac{3}{2}\Sigma$	$\widehat{\Theta} \rightarrow \phi$
$L_a \rightarrow \Sigma_a - \varepsilon_{ab}\Omega^b$	$\omega_{ab} \rightarrow \Omega\varepsilon_{ab}$	$\widehat{\omega}_{ab} \rightarrow \xi\varepsilon_{ab}$
$h_{ab} \rightarrow N_{ab}$	$\sigma_{ab} \rightarrow \Sigma_{ab}$	$\widehat{\sigma}_{ab} \rightarrow \zeta_{ab}$

$$3 \left(H^2 + \frac{k}{a^2} \right) = \Lambda + \kappa^2 \rho \left(1 + \frac{\rho}{2\lambda} \right) + \kappa^2 U - \frac{\langle L \rangle}{4} - \frac{\tilde{\kappa}^2}{2} \langle \tilde{\pi} \rangle, \quad (2.133)$$

ahol $\langle L \rangle$ -t (2.84) definiálja, U -t pedig:

$$\kappa^2 U = \frac{\langle \widehat{\Theta} \rangle^2}{6} + \frac{1}{2} \langle \widehat{\Theta} \rangle \langle \widehat{K} \rangle - \frac{1}{2} \langle \widehat{K}_b \rangle \langle \widehat{K}^b \rangle - \frac{1}{4} \langle \widehat{\sigma}_{ab} \rangle \langle \widehat{\sigma}^{ab} \rangle - \langle \mathcal{E} \rangle + \frac{\tilde{\kappa}^2}{2} \langle \tilde{\rho} + \tilde{p} \rangle. \quad (2.134)$$

Az U mennyiség a [163]-ban bevezetett effektív energiasűrűség.

Anizotróp brán-világok

Homogén, de anizotróp bránt tartalmazó 5d megoldások szintén ismertek.

A [169] cikkben találtak egy olyan vákuum, kozmológiai állandóval rendelkező, sztatikus és anizotróp 5d téridőt, amelybe mozgó Binachi I típusú brán ágyazható. A brán tükörszimmetrikus beágyazása a bránon anizotróp nyomás megjelenésével jár együtt. Így a brán anyag nem lehet tökéletes folyadék. Izotróp brán folyadékot csak izotróp 5d megoldásra találtak.

Eljárásukat [170]-ben általánosították nem sztatikus 5d téridőre. Feltéve a metrika komponenseinek szeparálhatóságát, olyan 5d megoldásokat találtak, amelyek kombinálják a 4d Kasner megoldást [171] a [169] sztatikus megoldásával.

A B.4. mellékletben a [169]-ben talált 5d megoldás kinematikai, gravito-elektro-mágneses és anyagi változóinak listáját tartalmazza. Hasonló számolás eredményezne egy listát [170] 5d megoldására.

2.1.9. Konklúzió

A 2.1. fejezetben kifejlesztettem egy általános 3+1+1 kovariáns formalizmust, amely alkalmas az 5d gravitációs dinamika vizsgálatára a bránon és azon kívül. Általánosítottam a korábbi 3+1+1 felbontásban kanonikus változókat használó, duplán fóliázható téridőkre kidolgozott [4], [5], az általános relativitáselméleti [2], [172]-[174] és a bránelméleti [3] 3+1 kovariáns formalizmusokat. Szintén általánosítottam az általános relativitáselméletben és az $f(R)$ gravitációban használt 2+1+1 kovariáns formalizmust [175], [176]. Az evolúciós és a kényszer egyenleteket olyan kinematikai, gravito-elektro-mágneses és anyagi változóban írtam fel, melyek skalárok, 3-vektorok, vagy 3-tenzorok. A változók száma jóval több, mint alacsonyabb dimenzióban, ez különösen igaz az 5d anyagra és a Weyl tenzor projekcióira. A kinematikai változók azonban hasonlóak azokhoz, mint amik a 2+1+1 kovariáns formalizmusban jelennek meg. A [177] cikkeihez képesti jelölés megfeleltetést a 2.1 táblázat mutatja:

A 3+1+1 formalizmus egyenleteinek egy alcsoportjából megkonstruáltam olyan egyenleteket, melyek leírják a gravitációs dinamikát a bránon. Ezek korábban csak kozmológiai állandóval rendelkező vákuum 5d téridőbe tükörszimmetrikusan ágyazott bránra voltak ismertek [3]. Javítottam az irodalomban meglévő hibákat. A brán egyenletek általában nem zártak. A for-

malizmus segítségével azonban általánosabb záródási feltételt sikerült megfogalmazni, mint ami korábban ismert volt.

Kozmológiai alkalmazásként viszonyultam a meglévő irodalomhoz, mind izotróp és anizotróp brán-világok esetén.

2.2. Lokálisan forgás-szimmetrikus, stacionér vákuum brán téridők

A fejezet a [150] publikáció VI. fejezetét dolgozza fel. Itt egy új brán megoldás származtatását mutatom be.

Az előző fejezetben kidolgozott formalizmus első alkalmazásában az 5d téridőben és a bránon kozmológiai vákuum van (a megfelelő kozmológiai konstansok nem nullák). A brán beágyazása szimmetrikus. Ekkor az effektív Einstein egyenlet a következő alakot ölti:

$$G_{ab} = \Lambda g_{ab} - \mathcal{E} \left(u_a u_b + \frac{1}{3} h_{ab} \right) + 2\hat{\mathcal{E}}_{(a} u_{b)} - \hat{\mathcal{E}}_{ab} . \quad (2.135)$$

Stacionér téridőben $\dot{f} = 0$ bármely f skalármezőre. A stacionaritás miatt van egy kijelölt időszerű Killing vektor, ezért az előző fejezetben kidolgozott 3+1+1 felbontás különösen alkalmas a gravitációs dinamika bránon történő alkalmazására, mivel a brán definiálja a másik kijelölt irányt.

Az eljárást specializálom olyan 4d brán téridőkre, amelyek lokális forgás-szimmetriával rendelkeznek (LFSZ). Egy ilyen szimmetria ad egy további térszerű egység vektormezőt (e^a), abban az értelemben, hogy van egy egyértelműen preferált térbeli irány mindegyik pontban, ami kijelöli a lokális forgás-szimmetriát. Egy további speciális vektormező választása esetén a térbeli mennyiségek egy további felbontása vezetne egy általános 2+1+1+1 formalizmushoz. Ekkor a h_{ab} metrikát továbbbontva kapható:

$$h_{ab} = e_a e_b + q_{ab} , \quad (2.136)$$

ahol q_{ab} a bránon az e^a és u^a -ra merőleges 2d felületen az indukált metrika.

Látni fogjuk, a téridő struktúrájának ezek a szimmetriái biztosítják, hogy a téridő csupán skalár mennyiségekkel leírható és nincs szükség vektorokra, vagy tenzori mennyiségekre. Ez egy nagyon hasznos tulajdonsága a formalizmusnak. Továbbá a szimmetriák biztosítják, hogy bármely f skalár csak az e^a forgástengely mező integrál görbéjének paraméterétől függnek. E paraméter szerinti kovariáns deriváltra az $f^* \equiv e^a D_a f$ jelölést használom.

2.2.1. Az e^a vektormezőhöz tartozó független kinematikai mennyiségek

Felbontás

A jelen alkalmazás céljára elegendő megadni az e^a vektormező brán kovariáns deriváltjának irreducibilis elemekre történő felbontását, amik a kinematikai mennyiségeket definiálják. A $\nabla_a e_b$ felbontásában szereplő kinematikai mennyiségek a \sim megkülönböztető jelzést kapják:

$$\nabla_a e_b = \tilde{L} u_a u_b - \tilde{L}_a u_b - u_a \tilde{K}_b + e_a \tilde{A}_b + \frac{\tilde{\Theta}}{2} q_{ab} + \tilde{\sigma}_{ab} + \tilde{\omega}_{ab} , \quad (2.137)$$

ahol

$$\begin{aligned} \tilde{L} &= u^c u^d \tilde{\nabla}_c e_d , \quad \tilde{\Theta} = q^{ab} D_a e_b , \\ \tilde{L}_a &= u^d h_a^c \tilde{\nabla}_c e_d , \quad \tilde{K}_b = u^c h_b^d \tilde{\nabla}_c e_d , \quad \tilde{A}_b = e^c q_b^d \tilde{\nabla}_c e_d , \end{aligned}$$

$$\tilde{\omega}_{ab} = q_{[a}^c q_{b]}^d \tilde{\nabla}_c e_d, \quad \tilde{\sigma}_{ab} = q_a^c q_b^d \tilde{\nabla}_c e_d - \frac{\tilde{\Theta}}{2} q_{ab}. \quad (2.138)$$

Az \tilde{L} és \tilde{L}_a nem függetlenek a korábban bevezetett változóktól, kifejezhetők az u^a -hoz tartozó kinematikai mennyiségek projekcióival:

$$\tilde{L} = -e^a A_a, \quad \tilde{L}_a = -e^d \left(\frac{\Theta}{3} h_{ad} + \sigma_{ad} + \omega_{ad} \right). \quad (2.139)$$

Ezzel szemben a $\tilde{\Theta}$, \tilde{K}_b , \tilde{A}_b , $\tilde{\sigma}_{ab}$ és $\tilde{\omega}_{ab}$ független kinematikai mennyiségek az előző fejezetben bevezetettéktől. Hasonlóan ω_a és $\tilde{\omega}_a$ -hoz, szintén definiálható az

$$\tilde{\omega}_a = \frac{1}{2} \varepsilon_{abc} \tilde{\omega}^{bc} \quad (2.140)$$

forgásvektor.

LFSZ szimmetria

A kijelölt e_a vektor teljesíti az $u^a e_a = 0$, $e^a e_a = 1$ feltételeket. Követve [178]-et, származtatok néhány az LFSZ szimmetriából származó következményt. A szimmetria és a normalizálás adja, hogy

$$e^a D_a e_b = 0, \quad \dot{e}_{\langle b} = 0, \quad (2.141)$$

vagyis e_a geodetikus h_{ab} -n és Fermi propagált a brán megfigyelő világvonalán. Ezek az egyenletek, és a szimmetria továbbá adja, hogy (2.140) átírható a következő alakba:

$$\tilde{\omega}_a = \varepsilon_a^{bc} q_{[b}^e q_{c]}^d \tilde{\nabla}_e e_d = \varepsilon_{abc} D^b e^c. \quad (2.142)$$

Az LFSZ szimmetria miatt minden vektormezőnek arányosnak kell lennie e^a -val, így:

$$\begin{aligned} A^a &= A e^a, & \omega_a &= \omega e_a, & \tilde{\omega}_a &= \tilde{\omega} e_a, \\ \hat{\mathcal{E}}^a &= \hat{\mathcal{E}}^V e^a, & D^a \Theta &= \Theta^* e_a, & D_a \mathcal{E} &= \mathcal{E}^* e_a, \end{aligned} \quad (2.143)$$

Az e^a vektormező és a q_{ab} indukált metrika definiál egy egyértelmű térszerű nyommentes szimmetrikus e_{ab} tenzormezőt:

$$e_{ab} = e_a e_b - \frac{q_{ab}}{2}, \quad (2.144)$$

amely teljesíti a következőket:

$$\begin{aligned} u^a e_{ab} &= 0, & e^a e_{ab} &= e_b, & e^a_a &= 0, & 2e_{ac} e^c_b &= e_{ab} + h_{ab}, \\ e_{ab} e^{ab} &= \frac{3}{2}, & D^b e_{ab} &= \frac{3\tilde{\Theta}}{2} e_a, & \dot{e}_{\langle ab} &= 0. \end{aligned} \quad (2.145)$$

Megint csak az LFSZ szimmetria miatt, az összes 3d nyommentes szimmetrikus tenzormező arányos e_{ab} -val:

$$\sigma_{ab} = \frac{2\sigma}{\sqrt{3}} e_{ab}, \quad E_{ab} = \frac{2E}{\sqrt{3}} e_{ab}, \quad H_{ab} = \frac{2H}{\sqrt{3}} e_{ab}, \quad \hat{\mathcal{E}}_{ab} = \frac{2\hat{\mathcal{E}}}{\sqrt{3}} e_{ab}. \quad (2.146)$$

A (2.143) és (2.146) definíciókban alkalmasan normált skalárok kerültek bevezetésre: A , ω , $\tilde{\omega}$, σ , $\hat{\mathcal{E}}^V$, $\hat{\mathcal{E}}$, E és H , amelyek kiváltják a vektoriális, illetve tenzoriális változókat.

Az LFSZ szimmetriából, használva a (2.141), (2.143), (2.146) és (2.145) egyenleteket, szintén következik, hogy

$$\tilde{K}_a = \tilde{A}_a = 0, \quad \tilde{\sigma}_{ab} = 0,$$

$$\tilde{L} = -A, \quad \tilde{L}_a = -\left(\frac{\Theta}{3} + \frac{2\sigma}{\sqrt{3}}\right) e_a. \quad (2.147)$$

Ezért csak két e^a -hoz tartozó kinematikai mennyiség marad, ami nem triviális és független a 2.1.2. alfejezetben bevezetettektől. Ezek a $\tilde{\Theta}$ és $\tilde{\omega}$.

2.2.2. I-es osztályú LFSZ típusú feltételek

Az LFSZ modellek általános relativisztikus osztályozása megtalálható [178]-ban, és az RS2 brán-világokban $\hat{\mathcal{E}}_a = 0 = \hat{\mathcal{E}}_{ab}$, $\mathcal{E} < 0$ feltételekkel visszanyerhető. Az osztályozás azonban általános esetben, vagy eddig ebben a fejezetben felhasznált egyszerűsítő feltevésekkel sem tartható. Továbbiakban azonban csak olyan brán téridőkről lesz szó, amelyekben teljesülnek az általános relativitáselméleti LFSZ I osztályt jellemző feltételek, vagyis: $\tilde{\omega} = \Theta = \sigma = 0$. E feltételekkel a (2.118), (2.142), (2.143) és $\varepsilon_{aij} e^i e^j = 0$ -ból következik, hogy $\hat{\mathcal{E}}^V = 0$.

Érdekes megjegyezni ezen a ponton, hogy a 2.1.7-ben tárgyalt (2.126) egyenlet (ami időfejlődés szempontjából zárja a brán egyenleteket) teljesül. Bár a szimmetriákból következik, hogy $\dot{e}_{(ab)} = 0$ és $\hat{\mathcal{E}} = 0$, ezért $\hat{\mathcal{E}}_{(kj)} = 0$, így ez utóbbi is lehetne időfejlődés szempontjából a záródási feltétel.

Dinamika

Az e^a -hoz tartozó egyetlen független kinematikai mennyiség $\tilde{\Theta} e^a$ integrál görbéje menti evolúciója az e^a -ra vonatkozó Ricci azonosságokból származtatható [178]:

$$\tilde{\Theta}^* + \frac{\tilde{\Theta}^2}{2} = -\frac{2E}{\sqrt{3}} + \frac{2\mathcal{E}}{3} + \frac{\hat{\mathcal{E}}}{\sqrt{3}} - \frac{2\Lambda}{3}. \quad (2.148)$$

Más nem triviális brán egyenleteket a (2.114), (2.115), (2.117), (2.120), (2.121), (2.123) és (2.124) szolgáltat:

$$\mathcal{E}^* + 4A\mathcal{E} + 2\sqrt{3} \left[\hat{\mathcal{E}}^* + \left(\frac{3\tilde{\Theta}}{2} + A \right) \hat{\mathcal{E}} \right] = 0, \quad (2.149)$$

$$A^* + (\tilde{\Theta} + A) A + 2\omega^2 + \Lambda = -\mathcal{E}, \quad (2.150)$$

$$A^* + \left(A - \frac{\tilde{\Theta}}{2} \right) A - \omega^2 - \sqrt{3}E = \frac{\sqrt{3}\hat{\mathcal{E}}}{2}, \quad (2.151)$$

$$H + \left(2A - \tilde{\Theta} \right) \frac{\sqrt{3}\omega}{2} = 0, \quad (2.152)$$

$$\omega^* + (\tilde{\Theta} - A) \omega = 0, \quad (2.153)$$

$$E^* + \frac{3\tilde{\Theta}}{2} E - 3\omega H = \frac{\hat{\mathcal{E}}^*}{2} + \frac{3\tilde{\Theta}\hat{\mathcal{E}}}{4} - \frac{\mathcal{E}^*}{2\sqrt{3}}, \quad (2.154)$$

$$2H^* + 3\tilde{\Theta}H + 6E\omega = \frac{4\omega\mathcal{E}}{\sqrt{3}} - \omega\hat{\mathcal{E}}. \quad (2.155)$$

Eliminálva A^* -ot (2.150) és (2.151) egyenletekből egy algebrai reláció kapható:

$$0 = \frac{3\tilde{\Theta}A}{2} + 3\omega^2 + \Lambda + \sqrt{3}E + \mathcal{E} + \frac{\sqrt{3}\hat{\mathcal{E}}}{2}. \quad (2.156)$$

Bármely rendszer, ami kielégíti (2.148)-(2.153) egyenleteket, azonosan teljesíti (2.154) és (2.155)-öt is. Ez a következőképpen látható be. Véve (2.156) \star -deriváltját, és felhasználva a (2.148)-(2.153) egyenleteket a (2.154) egyenlet nyerhető. Hasonlóan, a (2.152) egyenlet \star -deriváltját

kombinálva (2.148)-(2.153)-el megkapható (2.155).

Van tehát 6 független (2 algebrai és 4 elsőrendű differenciál) egyenlet a megmaradt 7 változóra (\mathcal{E} , $\hat{\mathcal{E}}$, $\tilde{\Theta}$, A , ω , E , H). Ezért további feltétel róható ki. A

$$\hat{\mathcal{E}} = -\frac{2\mathcal{E}}{\sqrt{3}} \quad (2.157)$$

feltételt választom, amely nagymértékben egyszerűsíti (2.156)-et.

Diszkusszió

A (2.152), (2.156) algebrai egyenletek meghatározzák a többi változó függvényében H -t és E -t. A (2.157) feltétel a (2.148)-(2.150) és (2.153) egyenleteket a következőképpen egyszerűsíti:

$$\tilde{\Theta}^* + \frac{\tilde{\Theta}^2}{2} - \tilde{\Theta}A - 2\omega^2 = 0, \quad (2.158)$$

$$\mathcal{E}^* + 2\mathcal{E}\tilde{\Theta} = 0, \quad (2.159)$$

$$A^* + (\tilde{\Theta} + A)A + 2\omega^2 + \Lambda = -\mathcal{E}, \quad (2.160)$$

$$\omega^* + (\tilde{\Theta} - A)\omega = 0. \quad (2.161)$$

A (2.159) és (2.161) egyenletekből kapható, hogy

$$\tilde{\Theta} = (\ln \mathcal{E}^{-1/2})^*, \quad (2.162)$$

$$A = (\ln \omega \mathcal{E}^{-1/2})^*. \quad (2.163)$$

Bevezetve az

$$x = \ln \mathcal{E}^{-1/2}, \quad (2.164)$$

$$y = \ln \omega \mathcal{E}^{-1/2} \quad (2.165)$$

segédváltozókat a fennmaradó (2.158) és (2.160) egyenletek az alábbi alakot öltik:

$$x^{**} + \frac{(x^*)^2}{2} - x^*y^* = 2e^{y-x}, \quad (2.166)$$

$$y^{**} + (y^*)^2 + x^*y^* = -(2e^{y-x} + e^{-2x} + \Lambda). \quad (2.167)$$

Ezek egy csatolt másodrendű, közönséges, nemlineáris differenciálegyenlet-rendszert alkotnak, amelyek megadják az ω és \mathcal{E} változókat. Az egyenletrendszer megoldása a nemlinearitása miatt analitikusan nehéz. Abban, hogy partikuláris megoldását találják ennek az egyenletrendszernek egy a metrikára vonatkozó feltevés fog segítséget nyújtani.

2.2.3. Árapály töltésű Taub-NUT-(A)dS megoldás

A választott szimmetriákkal kompatibilis a következő metrika feltevés:

$$ds^2 = -\frac{f(r)}{g(r)}(dt + \omega_k d\varphi)^2 + \frac{g(r)}{f(r)}dr^2 + g(r)(d\theta^2 + \Omega_k^2 d\varphi^2), \quad (2.168)$$

ahol

$$\Omega_k = \begin{cases} \sin \theta , & k = 1 \\ 1 , & k = 0 \\ \sinh \theta , & k = -1 \end{cases}$$

és ω_k a θ -nak egy másik függvénye. Az LFSZ szimmetria tengelye:

$$e^a = \frac{f^{1/2}}{g^{1/2}} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^a . \quad (2.169)$$

Az u_a 1-formát a következőképpen választva:

$$u = -\frac{f^{1/2}}{g^{1/2}} (dt + 2\omega_k d\varphi) , \quad (2.170)$$

és alkalmazva $\widehat{\mathcal{E}}^V = 0$ -át, illetve a (2.146), (2.157), (2.169) egyenleteket, az 5d Weyl tenzornak az effektív Einstein egyenletekben megjelenő része:

$${}^{(4)}\mathcal{E}^t_t = {}^{(4)}\mathcal{E}^r_r = -{}^{(4)}\mathcal{E}^\theta_\theta = -{}^{(4)}\mathcal{E}^\varphi_\varphi = -\mathcal{E} , \quad {}^{(4)}\mathcal{E}^t_\varphi = -2\mathcal{E}\omega_k . \quad (2.171)$$

Mivel $\widehat{\mathcal{E}}_a \propto \widehat{\mathcal{E}}^V = 0$, illetve H_{ab} -nak arányosnak kell lennie e_{ab} -vel, kapható (mindkettőből):

$$\Omega_k \frac{d^2 \omega_k}{d\theta^2} - \frac{d\Omega_k}{d\theta} \frac{d\omega_k}{d\theta} = 0 . \quad (2.172)$$

Integrálva egyet

$$\Omega_k^{-1} \frac{d\omega_k}{d\theta} = -2l , \quad (2.173)$$

ahol l konstans. Egy második integrálás adja, hogy

$$\omega_k(\theta) = \begin{cases} 2l \cos \theta + L , & k = 1 \\ -2l\theta + L , & k = 0 \\ -2l \cosh \theta + L , & k = -1 \end{cases} , \quad (2.174)$$

ahol L egy másik integrálási állandó. Bevezetve egy új időváltozót $t + L\varphi \rightarrow t$ ez a konstans eltüntethető.

Felhasználva (2.174) egyenletet, közvetlen számolás mutatja, hogy a metrika feltevés kompatibilis a választott LFSZ I osztály feltételeivel:

$$\Theta = \sigma = a = \widehat{\mathcal{E}}^V = 0 . \quad (2.175)$$

A (2.168), (2.174) egyenleteket alkalmazva a kinematikai és gravito mágneses mennyiségek kifejezései metrika függvényekkel:

$$\begin{aligned} \widetilde{\Theta} &= \frac{f^{1/2}}{g^{3/2}} \frac{dg}{dr} , \quad A = \frac{d}{dr} \left(\frac{f}{g} \right)^{1/2} , \quad \omega = \frac{lf^{1/2}}{g^{3/2}} , \\ \mathcal{E} &= \frac{f^{1/2}}{g^{5/4}} \frac{d}{dr} \left(\frac{f^{1/2}}{g^{3/4}} \frac{dg}{dr} \right) - \frac{3l^2 f}{g^3} - \frac{k}{g} + \Lambda , \\ \frac{2\widehat{\mathcal{E}}}{\sqrt{3}} &= \frac{1}{3g} \frac{d^2 f}{dr^2} - \frac{2}{3g^2} \frac{df}{dr} \frac{dg}{dr} + \frac{f}{3g^3} \left(\frac{dg}{dr} \right)^2 + \frac{4l^2 f}{3g^3} + \frac{2k}{3g} , \\ \frac{2E}{\sqrt{3}} &= \frac{1}{6g} \frac{d^2 f}{dr^2} - \frac{1}{3f^{1/2}} \frac{d}{dr} \left(\frac{f^{3/2}}{g^2} \frac{dg}{dr} \right) - \frac{4l^2 f}{3g^3} - \frac{k}{3g} , \\ \frac{2H}{\sqrt{3}} &= -l \frac{d}{dr} (fg^{-2}) . \end{aligned} \quad (2.176)$$

Ezekre a mennyiségekre a (2.152), (2.156), (2.157) és (2.158)-(2.161) kényszerek vonatkoznak, melyek az alábbi két független egyenletet adják az $f(r)$, illetve $g(r)$ metrikus függvényekre:

$$g^{3/2} \frac{d^2 g^{1/2}}{dr^2} = l^2, \quad (2.177)$$

$$\frac{d^2 f}{dr^2} = 2k - 4\Lambda g. \quad (2.178)$$

Megszorozva az első egyenletet dg/dr -vel, és integrálva:

$$\left(\frac{dg}{dr}\right)^2 + 4l^2 = C_1 g, \quad (2.179)$$

ahol $C_1 > 0$ egy integrálási konstans. Egy további integrálás eredményezi, hogy

$$g(r) = \frac{C_1}{4} (r + C_2)^2 + \frac{4l^2}{C_1}, \quad (2.180)$$

ahol C_2 egy másik integrálási állandó. Az $r = 0$ újra definiálásával a C_2 konstans az r koordinátába abszorválható. A C_1 állandó szintén rögzíthető a koordináták, illetve paraméterek következő átskálázásával: $(2t/C_1^{1/2}, C_1^{1/2}r/2, 4l^2/C_1) \rightarrow (t, r, l^2)$. Formálisan ez a $C_1 = 4$ választást eredményezi.

A $g(r)$ ismeretében a (2.178) egyenlet megoldható a másik metrikus függvényre:

$$f(r) = C_4 + C_3 r + (k - 2l^2 \Lambda) r^2 - \frac{\Lambda}{3} r^4, \quad (2.181)$$

ahol C_3 és C_4 integrálási állandók. A $C_3 = -2m$ és $C_4 = q - kl^2 + \Lambda l^4$ újraparaméterezéssel a metrikus függvények:

$$f(r) = k(r^2 - l^2) - 2mr + q - \Lambda \left(\frac{r^4}{3} + 2l^2 r^2 - l^4 \right), \quad (2.182)$$

$$g(r) = r^2 + l^2, \quad (2.183)$$

$$\omega_k(\theta) = \begin{cases} 2l \cos \theta, & k = 1 \\ -2l\theta, & k = 0 \\ -2l \cosh \theta, & k = -1 \end{cases}. \quad (2.184)$$

Ez nagyon hasonló az általános relativisztikus Einstein-Maxwell rendszer töltött-Taub-NUT-(A)dS megoldására.

2.2.4. Megfeleltetés a töltött Taub-NUT-(A)dS téridővel

Az általános relativitáselméletbeli töltött Taub-NUT-(A)dS téridő annyiban különbözik az előző alfejezetben talált megoldástól, hogy a q paraméter értéke csak pozitív lehet.

Ez a téridő $k = 1, l = 0, m = 0, q = 0$ esetén a Λ kozmológiai állandó előjelétől függően a de Sitter ($\Lambda > 0$), vagy az Anti-de Sitter téridő ($\Lambda < 0$).

A $k = 1$ és $l = 0$ paraméterekre a Taub-NUT-(A)dS téridő az alábbi gömbszimmetrikus fekete lyuk megoldásokat tartalmazza:

- *Schwarzschild* téridő ($\Lambda = 0, q = 0$): m tömegű fekete lyuk;
- *Reissner-Nordström* téridő ($\Lambda = 0, q = Q^2$): m tömegű és Q elektromos töltésű fekete lyuk;

- *Schwarzschild-(Anti)-de Sitter* téridő ($q = 0$): m tömegű fekete lyuk Λ kozmológiai állandóval rendelkező téridőben;
- *Reissner-Nordström-(Anti)-de Sitter* téridő: m tömegű és Q elektromos töltésű fekete lyuk Λ kozmológiai állandóval rendelkező téridőben.

Amikor $k = 1$, $\Lambda = 0$ és $q = 0$ kapjuk a Taub-NUT (Newman, Unti, Tamburino) téridőt. Ennek a téridőnek érdekessége, hogy zárt időszerű görbéket is tartalmaz. Esemény horizontok az $r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 + l^2}$ helyeken vannak. Zárt időszerű görbéket az $r < r_-$ és $r > r_+$ tartományokban tartalmaz. A NUT töltés megjelenésének további következményeit lásd [179]-[182]-ben.

A töltött Taub-NUT-(A)dS téridő a felsorolt határesetek kombinációja, amelyben a paraméterek a tömeg m , elektromos töltés Q , NUT töltés l és a kozmológiai állandó Λ .

A fejezet fő eredménye a bizonyos szimmetriák esetén talált új brán megoldás. A feltett szimmetriák a stacionaritás és a lokális forgás-szimmetria. A talált 4d brán formálisan olyan, mint a töltött Taub-NUT-(A)dS téridő. A megjelenő q konstans értéke azonban (amely Q^2 helyett jelenik meg) negatív is lehet nem úgy, mint az általános relativitáselméletben. A (2.135) effektív Einstein egyenletből világos, hogy a q paraméter csak az 5d Weyl tenzorból származhat [lásd (2.171)]. Valóban, a (2.176) negyedik egyenletéből:

$$\mathcal{E} = -\frac{q}{(l^2 + r^2)^2} . \quad (2.185)$$

Tehát a q paraméter a magasabb dimenziós téridő Weyl szektorából ered, a származtatott megoldás az *árapály töltésű Taub-NUT-(A)dS brán*-ként interpretálható. Amikor a q paraméter negatív, akkor erősíti, míg ha pozitív, akkor gyengíti a gravitációt a bránon. Az utóbbi esetben ugyanazt okozza, mint az elektromos töltés.

Gömbszimmetrikus és forgó esetekben árapály töltésű brán megoldásokat korábban [183]-[184]-ben találtak. Ezek a téridők szintén megfelelnek az elektromosan töltött általános relativisztikus Einstein-Maxwell megoldásoknak, amikor az elektromos töltés négyzetét az árapály töltéssel azonosítjuk.

Fontos megemlíteni, hogy fekete lyuk brán megoldásokra jelenleg nem ismert, hogy milyen 5d téridőkbe ágyazhatók be.

2.3. 5d Birkhoff-tétel kiterjesztése

A fejezet a [185] cikkben elért eredményeket foglalja össze.

A kozmológiai szimmetriáknak eleget tevő brán-világ modellek a Friedmann bránok, köztük az Einstein sztatikus brán. Az Einstein sztatikus brán a Friedmann bránok olyan alelete, amikor a skálafaktor konstans. Általános relativitáselméletbeli Einstein sztatikus univerzum instabil a térbelileg homogén és izotróp perturbációkra [186], de stabilak kis inhomogén vektor és tenzor perturbációkra, illetve adiabatikus skalár sűrűség inhomogenitásokra, ha a c_s hangsebesség teljesíti $c_s^2 > 1/5$ feltételt [187].

A legáltalánosabb 5d téridő, amelyben csak egy negatív $\tilde{\Lambda} = 3\varepsilon\Gamma^2/\kappa^2$ (ε adja $\tilde{\Lambda}$ előjelét, a tételben $\varepsilon = -1$) kozmológiai állandó van, tartalmaz egy Friedmann bránt, és az extra dimenzió mentén megőrzi a kozmológiai szimmetriákat sztatikus [6], [133]:

$$d\tilde{s}^2 = -f(r; k, \varepsilon) dt^2 + \frac{dr^2}{f(r; k, \varepsilon)} + r^2 [d\chi^2 + \mathcal{H}^2(\chi; k) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] , \quad (2.186)$$

ahol

$$f(r; k, \varepsilon) = k - \frac{2m}{r^2} - \frac{\varepsilon\Gamma^2}{2} r^2 , \quad (2.187)$$

és

$$\mathcal{H}(\chi; k) = \begin{cases} \sin \chi, & k = 1 \\ \chi, & k = 0 \\ \sinh \chi, & k = -1 \end{cases}. \quad (2.188)$$

Erre az eredményre szokás 5d Birkhoff-tételként hivatkozni. (Vizsgálni fogom a $\tilde{\Lambda} \geq 0$ esetet is, ezért tartom meg az ε jelölést $\tilde{\Lambda}$ előjelére.)

Egy érdekes kivételes esetet ad $\varepsilon = -1$ -re a [7]-ben talált téridő, amely a kozmológiai állandóval rendelkező 5d Einstein egyenletek egy Einstein bránt tartalmazó megoldása. A talált 5d téridő ($y > 0$):

$$\Gamma^2 d\tilde{s}^2 = -F^2(y; \varepsilon) d\tau^2 + dy^2 + d\chi^2 + \mathcal{H}^2(\chi; \varepsilon) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (2.189)$$

ahol

$$F(y; \varepsilon) = \begin{cases} A \cos(\sqrt{2}y) + B \sin(\sqrt{2}y), & \varepsilon = 1 \\ A + \sqrt{2}By, & \varepsilon = 0 \\ A \cosh(\sqrt{2}y) + B \sinh(\sqrt{2}y), & \varepsilon = -1 \end{cases}, \quad (2.190)$$

Ez a Gergely-Maartens (GM) téridő, aminek az $y = 0$ -nál lévő határa egy sztatikus Einstein brán és rendelkezik ugyanazon szimmetriákkal, mint azok az 5d téridők, amelyekre az 5d Birkhoff-tétel vonatkozik. A GM metrika jól definiált a bránon, ha $A \neq 0$. A Lanczos egyenletből következik, hogy $B = 0$ inkompatibilis a brán anyaggal [7]. Az A és B konstansok közül az egyik a τ koordinátába abszorválható, így a GM metrika a megoldások egy paraméteres családját adja. A görbületi invariánsokat kiszámolva (például: $\tilde{R}_{abcd}\tilde{R}^{abcd}$, $\tilde{C}_{abcd}\tilde{C}^{abcd}$) mutatják, hogy a GM metrika nem alesete a (2.186) térdőnek.

A magasabb dimenziós Birkhoff-tételt alternatív módon [188]-ban fogalmazták meg. Itt megállapítottak egy feltétel halmazát, amely a magasabb dimenziós téridő sztatikusságához vezet. A GM metrika nem teljesíti a [188]-ban megfogalmazott feltételek egyikét ($\rho \neq \text{const}$). Ezért nem érvényes rá [188] 1. tétele.

A [6]-ban található bizonyítás pedig, amely a (2.186) metrikához vezet, nem alkalmazható, ha a [6]-ban bevezetett B függvény [ez a B különbözik a (2.189) metrikában található B -tól] konstans, mint (2.189) esetében lenne. Ekkor nem lehet bevezetni az $r = B^{1/3}$ -ont új radiális koordinátaként azért, hogy megkapjuk a megoldás (2.186) alakját.

A GM megoldás néhány görbületi skalárjára [7]-ben megmutatták ($\varepsilon = -1$ -re), hogy azok megegyeznek a (2.186) 5d fekete lyuk metrikáéval ($k = \varepsilon = -1$ esetén) a horizonton abban a speciális esetben, amikor $m = -1/4\Gamma^2$ [7]. Ez annak a lehetőségét hordozza magában, hogy a GM metrika és (2.186) horizontja között van valamilyen kapcsolat. Ezt a sejtést [7]-ben fogalmazták meg.

Az általános relativitáselméletben ismert, hogy a Bertotti-Robinson metrika kapcsolatban áll az extrémális Reissner-Nordström téridő horizontjával. Kapcsolatukat a C mellékletben tárgyalom.

2.3.1. Fekete lyuk horizontok a Friedmann brán határral rendelkező 5d kozmológiai vákuum téridőkben

A (2.186) Schwarzschild - (Anti)-de Sitter metrikában az esemény horizontok helyzetét az $f = 0$ egyenlet adja, amit különböző ε -ra a 2.2.-2.4. táblázatokban soroltam fel.

A következő két speciális esetben van két horizont: $\varepsilon = k = 1, m > 0$, vagy $\varepsilon = k = -1, m < 0$. Ezek a horizontok egybeesnek (*degenerált horizont*) $\Gamma r = 1$ -nél $\varepsilon m = 1/4\Gamma^2$ -re. Az utóbbi esetben (amikor $\varepsilon = -1$) ismert, hogy az 5d fekete lyuk metrika görbületi skalárjai a horizonton megegyeznek a GM metrika görbületi skalárjaival [7]. Ezért az várható, hogy létezik valamilyen kapcsolat a GM metrika és az 5d fekete lyuk degenerált horizontjának régiója között.

Ennek megmutatásához bevezetem a $\rho = \Gamma r - 1$ új koordinátát, amelyik a degenerált horizont közelében kicsi, pozitív a horizont fölött és negatív alatta. Kis ρ esetén az f metrikus

2.2. táblázat. A horizontok helyzetét megadó r koordináta értéke eltűnő 5d kozmológiai állandóra ($\varepsilon = 0$).

	$m < 0$	$m = 0$	$m > 0$
$k = -1$	$\sqrt{-2m}$	sík metrika	–
$k = 0$	–	rosszul definiált metrika	–
$k = 1$	–	sík metrika	$\sqrt{2m}$

2.3. táblázat. A horizontok helyzetét megadó Γr értékek táblázata pozitív 5d kozmológiai állandóra ($\varepsilon = 1$).

	$m < 0$	$m = 0$	$m > 0$
$k = -1$	$\sqrt{-1 + \sqrt{1 - 4m\Gamma^2}}$	–	–
$k = 0$	$\sqrt{-4m\Gamma^2}$	–	–
$k = 1$	$\sqrt{1 + \sqrt{1 - 4m\Gamma^2}}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{1 \pm \sqrt{1 - 4m\Gamma^2}}$

függvény közelítőleg: $f = -2\varepsilon\rho^2$, és átskálázva a $t \rightarrow 4\Gamma^2 t$ koordinátát kapható a következő "horizont metrika":

$$\Gamma^2 d\tilde{s}^2 = \frac{\varepsilon}{2} \left(\rho^2 dt^2 - \frac{d\rho^2}{\rho^2} \right) + d\chi^2 + \mathcal{H}^2(\chi; \varepsilon) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) . \quad (2.191)$$

A (2.191) metrika $\varepsilon = k = 1$ (vagy $\varepsilon = k = -1$) esetén leírja a téridőt a Schwarzschild-de Sitter (vagy Schwarzschild-Anti-de Sitter-szerű, amikor $k = -1$) degenerált horizontja környezetében. Az idő koordináta $\varepsilon = 1$ -re ρ és $\varepsilon = -1$ -re t . Mivel a horizont metrika megoldja az 5d Einstein egyenleteket a $\tilde{\Lambda} = 3\varepsilon\Gamma^2/\kappa^2$ kozmológiai állandó jelenlétében, ezért kiterjeszthető ρ bármilyen értékeire.

A (2.186) fekete lyuk metrika és a horizont-megoldás jobb megértésének céljából érdemes megvizsgálni a két téridő szimmetriáit. Ha a téridőt megadó metrika invaráns a transzformációk valamilyen egy paraméteres csoportjával szemben, akkor azt a paraméter által leírt görbe érintő vektora (*Killing vektor*) generálta szimmetria transzformációnak nevezzük (egzakt definíciót lásd [11]-ben). Ekkor a metrika Killing vektor szerinti Lie deriváltja eltűnik, ezt az egyenletet *Killing egyenlet*nek nevezzük. A metrika ismeretében a Killing egyenlet megoldható a Killing vektorokra. A téridő szimmetriái a kapott lineárisan független Killing vektorok egymás közötti kommutációs relációiból, a *Killing algebrából* ismerhető fel. A horizont téridő esetén a következő lineárisan független Killing vektorok találhatók a $(t, \rho, \chi, \theta, \varphi)$ koordinátákban:

$$K_1 = (0, 0, 0, 0, 1) , \quad (2.192)$$

$$K_2 = (0, 0, 0, -\cos \varphi, \cot \theta \sin \varphi) , \quad (2.193)$$

$$K_3 = (0, 0, 0, \sin \varphi, \cot \theta \cos \varphi) , \quad (2.194)$$

$$K_4 = (0, 0, -\cos \theta, \sin \theta \partial_\chi \ln \mathcal{H}, 0) ,$$

$$K_5 = \left(0, 0, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta \sin \varphi \partial_\chi \ln \mathcal{H}, \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \partial_\chi \ln \mathcal{H} \right) ,$$

$$K_6 = \left(0, 0, \sin \theta \cos \varphi, \cos \theta \cos \varphi \partial_\chi \ln \mathcal{H}, -\frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \partial_\chi \ln \mathcal{H} \right) ,$$

2.4. táblázat. Ugyanaz, mint 2.3. táblázatban $\varepsilon = -1$ -re.

	$m < 0$	$m = 0$	$m > 0$
$k = -1$	$\sqrt{1 \pm \sqrt{1 + 4m\Gamma^2}}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{1 + \sqrt{1 + 4m\Gamma^2}}$
$k = 0$	–	–	$\sqrt{4m\Gamma^2}$
$k = 1$	–	–	$\sqrt{-1 + \sqrt{1 + 4m\Gamma^2}}$

$$K_7 = (1, 0, 0, 0, 0), \quad (2.195a)$$

$$K_8 = (t, -\rho, 0, 0, 0), \quad (2.195b)$$

$$K_9 = \left(\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2\rho^2}, -t\rho, 0, 0, 0 \right). \quad (2.195c)$$

A K_{1-6} térszerű Killing vektorok a szokásos kozmológiai szimmeriákhoz tartoznak. A többi Killing vektor hossza:

$$g(K_7, K_7) = \frac{\varepsilon}{2\Gamma^2} \rho^2, \quad (2.196)$$

$$g(K_8, K_8) = \frac{\varepsilon}{2\Gamma^2} (\rho^2 t^2 - 1), \quad (2.197)$$

$$g(K_9, K_9) = \frac{\varepsilon}{8\Gamma^2 \rho^2} (\rho^2 t^2 - 1)^2. \quad (2.198)$$

A K_7 és K_9 vektorok időszerűek $\varepsilon = -1$ -re, illetve térszerűek $\varepsilon = 1$ -re, amíg K_8 kauzális karaktere az $\varepsilon(\rho^2 t^2 - 1)$ szorzat előjelétől függ. A horizont metrika az $\varepsilon = 1, \rho^2 t^2 > 1$ eset kivételével sztatikus. A $\rho t = \pm 1$ egy Killing horizont K_8 -ra.

A K_{1-7} szintén Killing vektora a (2.186) fekete lyuk metrikának. Amíg K_{1-6} térszerű marad, addig K_7 kauzális karaktere függ a téridő régiótól, hiszen $g(K_7, K_7) = -f$. Ezért K_7 : *i.*) időszerű, ha nincs horizont; *ii.*) ha egy horizont van: időszerű a horizonton kívül és térszerű belül; *iii.*) ha két külön álló horizont van: időszerű a külső horizont felett és a belső alatt, amíg térszerű a két horizont között; *iv.*) ha degenerált horizont van: időszerű mindenhol kivéve a horizontot; *v.*) végezetül K_7 null vektor bármely horizonton, így az esemény horizontok (2.186)-ban szintén Killing horizontok K_7 -re, ez a tulajdonság azonban elveszik a közelítő horizont metrikában.

A horizont téridő rendelkezik továbbá $K_{8,9}$ Killing vektorokkal, ami mutatja, hogy több szimmetriával rendelkezik, mint a teljes fekete lyuk téridő.

A Killing algebra:

$$[K_i, K_j] = \varepsilon_{ijk} K_k, \quad (2.199)$$

$$[K_{3+i}, K_{3+j}] = \varepsilon \varepsilon_{ijk} K_k, \quad (2.200)$$

$$[K_i, K_{3+j}] = \varepsilon_{ijk} K_{3+k}, \quad (2.201)$$

$$[K_{6+i}, K_j] = 0 = [K_{6+i}, K_{3+j}], \quad (2.202)$$

$$[K_7, K_8] = K_7, \quad (2.203)$$

$$[K_8, K_9] = K_9, \quad (2.204)$$

$$[K_7, K_9] = K_8, \quad (2.205)$$

aminek osztályozása a 2.5. táblázatban található.

2.5. táblázat. A fekete lyuk metrika (felső sor) és a horizont metrika Killing algebrája (alsó sor) $\varepsilon = \pm 1$ -re.

ε	1	-1
K_{1-7}	$so(4) \oplus$	$so(1, 3) \oplus$
K_{1-9}	$so(4) \oplus so(1, 2)$	$so(1, 3) \oplus so(1, 2)$

A horizont metrika K_{1-6} és a GM metrika K_{1-6}^{GM} Killing vektorai (lásd [7]) azonosak. A GM metrika szintén rendelkezik további 3 Killing vektorral, amelyek egybe kell essenek K_{7-9} -el, ha a GM téridő kapcsolatban áll a horizont metrikával.

2.3.2. Kapcsolat a GM és a horizont téridők között

Azonnal látható a (χ, θ, φ) szektorból, hogy kapcsolat a (2.186) és (2.189) téridők között csak $k = \varepsilon$ -ra létezhet. Ugyanakkor nincs kapcsolat a nem kozmológiai esetben ($\varepsilon = 0$), mivel ekkor az $\tilde{R}_{abcd}\tilde{R}^{abcd}$ és $\tilde{C}_{abcd}\tilde{C}^{abcd}$ skalárok eltűnnek a GM téridőben, amíg (2.186)-ban $\tilde{R}_{abcd}\tilde{R}^{abcd} = \tilde{C}_{abcd}\tilde{C}^{abcd} = 288m^2/r^8$, ami csak r végtelen értékére, vagy $m = 0$ -ra tűnik el. Az utóbbi esetben (2.186) rosszul definiált.

Ebben a fejezetben bizonyítom, hogy $\varepsilon = \pm 1$ esetén a GM metrika leírja az ugyanazon ε -ra, $k = \varepsilon$ esetén a (2.186) 5d fekete lyuk (2.191)-el adott degenerált horizont régióját. Ezt úgy mutatom meg, hogy megkeresem a két téridő közötti koordináta transzformációt.

A GM metrika A paraméterét τ -ba abszorbálom, és B/A -t ezek után B -vel jelölöm. Ekkor az $F(y; \varepsilon = \pm 1)$ metrika függvény átírható a következő alakba:

$$\begin{aligned} F(y; \varepsilon) &= \cos z + \beta \sin z, & \varepsilon = \pm 1, \\ z(y; \varepsilon) &= \sqrt{2} i^{(1-\varepsilon)/2} y \\ \beta(B; \varepsilon) &= (-i)^{(1-\varepsilon)/2} B \end{aligned} \quad (2.206)$$

A $(t, \rho) \rightarrow (\tau, y)$ koordináta transzformációban megjelenő $t(\tau, y)$, $\rho(\tau, y)$, amely a horizont metrikát átviszi a GM metrikába, a következő differenciál egyenleteknek kell eleget tennie:

$$\rho^2 \left(\frac{\partial t}{\partial \tau} \right)^2 - \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \tau} \right)^2 = -2\varepsilon F^2(y; \varepsilon), \quad (2.207a)$$

$$\rho^2 \left(\frac{\partial t}{\partial \tau} \right) \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \tau} \right) \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right) = 0, \quad (2.207b)$$

$$\rho^2 \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)^2 = 2\varepsilon. \quad (2.207c)$$

Szeperálható megoldás esetén $t = t_0(\tau) t_1(y)$ és $\rho = \rho_0(\tau) \rho_1(y)$, ekkor (2.207) a következő alakra egyszerűsödik:

$$(\rho_0 \dot{t}_0)^2 (\rho_1 t_1)^2 - \left(\frac{\dot{\rho}_0}{\rho_0} \right)^2 = -2\varepsilon F^2(y; \varepsilon), \quad (2.208a)$$

$$(\rho_0^2 t_0 \dot{t}_0) (\rho_1^2 t_1 t_1') - \left(\frac{\dot{\rho}_0}{\rho_0} \right) \left(\frac{\rho_1'}{\rho_1} \right) = 0, \quad (2.208b)$$

$$(\rho_0 t_0)^2 (\rho_1 t_1')^2 - \left(\frac{\rho_1'}{\rho_1} \right)^2 = 2\varepsilon, \quad (2.208c)$$

ahol a pont a τ szerinti, míg a vessző az y szerinti deriválást jelentik. Az utolsó egyenletben a

$\rho_0^2 t_0^2$ szorzat csak τ függvénye, ezért (a) $t'_1 = 0$, így $t = t(\tau)$, vagy (b) $\rho_0 t_0 = \text{const.}$ Ezt a két esetet külön vizsgálom.

(a) Amikor $t = t(\tau)$ (2.208c)-ből:

$$\rho_1 = C_1 \exp(\pm \sqrt{-2\varepsilon} y) , \quad (2.209)$$

ahol C_1 egy állandó. A (2.208b) egyenlet adja, hogy $\rho_0(\tau) = C_0 = \text{állandó}$. Behelyettesítve ρ -t (2.208a)-ba:

$$C_0 C_1 \exp(\pm \sqrt{-2\varepsilon} y) \left(\frac{dt}{d\tau} \right) = \sqrt{-2\varepsilon} F(y; \varepsilon) . \quad (2.210)$$

Ezért $dt/d\tau$ -nak szintén egy állandónak kell lennie, amit C_2 -vel jelölve

$$F(y; \varepsilon) = \frac{C_0 C_1 C_2}{\sqrt{-2\varepsilon}} \exp(\pm \sqrt{-2\varepsilon} y) . \quad (2.211)$$

Partikuláris esetben ($C_0 C_1 C_2 = \sqrt{2}$) $\varepsilon = -1$ és $B = \pm 1$ -re a (2.206) metrika függvény:

$$F(y; -1) = \exp(\pm \sqrt{2} y) = \cosh \sqrt{2} y \pm \sinh \sqrt{2} y . \quad (2.212)$$

Továbbá a $C_2 = 1$ választással a koordináta transzformáció:

$$t = \tau , \quad \rho = \sqrt{2} \exp(\pm \sqrt{2} y) . \quad (2.213)$$

Ez a transzformáció a (2.191) degenerált horizont metrikát $\varepsilon = -1$ -re átviszi az $\varepsilon = -1$ és $B = \pm 1$ paraméterű GM téridőbe.

(b) Amikor $t'_1 \neq 0$ és $\rho_0 t_0 = C_3 \neq 0$ (konstans) a (2.208a) egyenletből következik, hogy

$$\frac{\dot{\rho}_0^2}{\rho_0^2} = \frac{-2\varepsilon F^2(y; \varepsilon)}{(\rho_1^2 t_1^2 C_3^2 - 1)} . \quad (2.214)$$

Ezért $\dot{\rho}_0/\rho_0 = -D = \text{állandó}$, így

$$\rho_0 = C_4 \exp(-D\tau) , \quad t_0 = \frac{C_3}{C_4} \exp(D\tau) , \quad (2.215)$$

ahol C_4 egy integrációs konstans. Ekkor (2.214)-ből

$$t_1^2 = \frac{D^2 - 2\varepsilon F^2(y; \varepsilon)}{C_3^2 D^2 \rho_1^2} , \quad (2.216)$$

a $\rho_0 t_0 = C_3$ -ból és (2.208b) egyenletből pedig

$$\rho_1^2 t_1 t'_1 C_3^2 + \frac{\rho'_1}{\rho_1} = 0 . \quad (2.217)$$

A két utolsó egyenlet miatt

$$\frac{\rho'_1}{\rho_1} = \frac{F'(y; \varepsilon)}{F(y; \varepsilon)} , \quad (2.218)$$

aminek a megoldása

$$\rho_1 = G F(y; \varepsilon) , \quad (2.219)$$

ahol G egy integrálási állandó. Végezetül (2.208c) a következő megszorítást eredményezi az $F(y; \varepsilon)$ függvényre

$$2\varepsilon F'(y; \varepsilon)^2 + 4F(y; \varepsilon)^2 - 2\varepsilon D^2 = 0 . \quad (2.220)$$

A (2.206) metrika függvény megoldja ezt az egyenletet $D^2 = 2(B^2 + \varepsilon)$ teljesülése esetén. Erre a specifikus D -re a horizont metrikát a

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{2} \exp(-D\tau) F(y; \varepsilon) , \\ t &= \frac{(-i)^{(1-\varepsilon)/2}}{\sqrt{2}(B^2 + \varepsilon)^{1/2}} \exp(D\tau) \frac{\tan z - \beta}{1 + \beta \tan z}\end{aligned}\quad (2.221)$$

transzformáció viszi GM-be (itt a $C_4 G = \sqrt{2}$ választás történt). Az (a) esetben talált koordináta transzformáció a (b)-ben talált eredménynek $D \rightarrow 0$ határesetére az $\varepsilon = -1$ és $B = \pm 1$ (így $D = 0$) esetén.

2.3.3. Diszkusszió

A (2.221) transzformáció az alábbi három esetre bontható:

(b1) $\varepsilon = 1$, ekkor a (t, ρ) horizont koordináták és a (τ, y) GM koordináták közötti transzformáció valós:

$$\begin{aligned}\rho &= D \exp(-D\tau) \cos(\alpha_1 + \sqrt{2}y) , \\ t &= \frac{1}{D} \exp(D\tau) \tan(\alpha_1 + \sqrt{2}y) ,\end{aligned}\quad (2.222)$$

ahol $B = -\tan \alpha_1$. E transzformációra $t^2 \rho^2 < 1$, ezért a GM téridő a (2.191) horizont téridőnek csupán egy részét fedi le.²

A (2.222) transzformáció összekapcsolja az 5d fekete lyuk horizont metrika $t^2 \rho^2 < 1$ régióját $\varepsilon = 1$ -re az ugyanilyen paraméterű GM metrikával. Ebben a régióban³ a horizont metrika sztatikus, amit a K_8 Killing vektor mutat.

(b2) $\varepsilon = -1$ és $B^2 > 1$ -re (ekkor $\text{sgn}(D^2) = 1$) a koordináta transzformáció

$$\begin{aligned}\rho &= D \exp(-D\tau) \sinh(\alpha_2 + \sqrt{2}y) , \\ t &= \frac{1}{D} \exp(D\tau) \coth(\alpha_2 + \sqrt{2}y) ,\end{aligned}\quad (2.223)$$

ahol $B = \coth \alpha_2$. A horizont koordináták eleget tesznek $t^2 \rho^2 > 1$ feltételnek. A GM metrika ebben az esetben szintén csak részlegesen fedi le a (2.191) téridőt. A horizont téridő ezen részén K_8 időszerű ugyanúgy, mint $K_{7,9}$.

(b3) $\varepsilon = -1$ és $B^2 < 1$ -re (ekkor $\text{sgn}(D^2) = -1$) a (ρ, t) horizont koordináták kapcsolata a GM koordinátákkal:

$$\begin{aligned}\rho &= -iD \exp(-D\tau) \cosh(\alpha_3 + \sqrt{2}y) , \\ t &= \frac{1}{D} \exp(D\tau) \tanh(\alpha_3 + \sqrt{2}y) ,\end{aligned}\quad (2.224)$$

ahol $B = \tanh \alpha_3$. Ebben az esetben D tisztán képzetes, ezért $t^2 \rho^2 < 0$. Mivel a koordináta transzformáció komplex, ez az eset a legközelebbi analógiája annak az általános relativitáselméleti eredménynek, hogy a Bertotti-Robinson metrika leírja az extrémális Reissner-Nordström téridő horizontját (ezt az eredményt az C mellékletben dolgozom fel).

²Ez hasonló a brán-világokban ismert azon híres példához, amelyik kapcsolatot teremt a Gauss normál koordinátákban az extra dimenzió konstans koordinátájánál lévő bránok és az 5d SchwarzSchild - Anti de Sitter téridőben mozgó bránok között [189].

³A (2.186) 5d fekete lyuk metrika az $\varepsilon = k = 1$ és $m > 0$ esetén csak a horizontok között sztatikus (amelyik degenerált $m = 1/4\Gamma^2$ -re). Más szóval a K_7 Killing vektor időszerű a horizontok között és térszerű azon kívül. Ennélfogva degenerált horizont esetén nincs időszerű Killing vektor. Azonban a (2.191) közelítő degenerált horizont metrika új szimmetriákat kap, köztük olyat (K_8), ami időszerű $t^2 \rho^2 < 1$ -re.

Láttuk, hogy az a) osztályba sorolt (2.213) koordináta transzformáció kapcsolatot teremt az $\varepsilon = -1$ paraméterű (2.191) 5d fekete lyuk téridő degenerált horizontja és az $\varepsilon = -1$, $B = \pm 1$ paraméterű GM téridő között. Ezért az (a), (b2), (b3) esetek lefedik az összes tartományát az $\varepsilon = -1$ paraméterű GM metrikának, míg (b1) lefedik az $\varepsilon = 1$ esetet.

Az $\varepsilon = -1$ paraméterű 5d fekete lyuk metrika sztatikus mind a degenerált horizont alatt és felett a K_7 Killing vektornak köszönhetően, amelyik szintén megmarad időszerű Killing vektornak a horizont metrika téridőben. A K_9 szintén időszerű, amíg K_8 időszerű a (b2), térszerű a (b3), és az a) esetben a kauzális karaktere függ koordináták aktuális értékétől.

Láttuk, hogy $\varepsilon = 1$ -re [(b1) eset] a (2.222) koordináta transzformáció összekapcsolja a sztatikus GM téridőt a horizont metrika sztatikus régiójával.

A GM metrika és a horizont téridő között valós [(a), (b1), (b2) esetek], vagy komplex koordináta transzformáció [(b3) eset] teremt kapcsolatot. Az utóbbi eset hasonlít a Bertotti-Robinson téridő és az extrémális Reissner-Nordström fekete lyuk degenerált horizontja közötti általános relativisztikus analógiához, amik között szintén komplex koordináta transzformáció képez kapcsolatot (C melléklet). Mind ott, mind az itt tárgyalt (b3) esetben, bár a koordináta transzformáció komplex, ennek csak valós alhalmaza jelenik meg az ívelemnégyzetben.

2.3.4. Konklúzió

Az 5d Birkhoff-tétel szerint a legáltalánosabb sztatikus 5d téridő, amelyben csupán egy negatív kozmológiai állandó van, tartalmaz egy Friedmann bránt, és az extra dimenzió mentén megőrzi a kozmológiai szimmetriákat a (2.186) metrika $\varepsilon = -1$ -re. Ez alól kivétel a GM téridő, amelyre [6] bizonyítása nem alkalmazható. Láttuk, hogy az 5d GM téridő, amelyik határaként egy Einstein bránt tartalmaz, bár szigorú értelemben sérti az 5d Birkhoff-tételt egy gyengébb értelemben mégiscsak eleget tesz neki az $\varepsilon = -1$ esetben.

Azt bizonyítottam, hogy a GM téridő a (2.186) metrika extrémális aleteinek degenerált horizontját írja le $\varepsilon = \pm 1$ -re. Ez analóg azzal az általános relativisztikus eredménnyel, hogy a kovariánsan konstans elektromágneses mező generálta Bertotti-Robinson téridő az extrémális Reissner-Nordström téridő degenerált horizont régiója.

2.4. Zárt Friedmann bránok evolúciója sugárzó 5d fekete lyuk jelenlétében

A fejezet a [190] és [191] cikkekben elért eredményeket foglalja össze.

A 2.3. fejezetben láttuk, hogy a plusz kiterjedt dimenzió mentén kozmológiai szimmetriákkal rendelkező sztatikus 5d téridőt, ahol $\tilde{T}_{ab}^{reg} = 0$, a (2.186), vagy a GM metrika adja [6], [133], [7]. A (2.186) téridő Eddington-Finkelstein koordinátákban:

$$d\tilde{s}^2 = -f dv^2 + 2\epsilon dv dr + r^2 [d\chi^2 + \mathcal{H}^2(\chi; k) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] . \quad (2.225)$$

Megengedve a fenti téridőben megjelenő m tömeg paraméternek a v nullkoordinátától való függését kapható az 5d Vaidya-Anti-de Sitter (VAdS₅) téridő, ahol

$$\tilde{T}_{ab}^{reg} = \tilde{T}_{ab}^{ND} = \psi(v, r) l_a l_b , \quad (2.226)$$

ami sugárzást ír le geometriai optikai közelítésben (null por). Az l_a egy jövő irányított null 1-forma, a $\psi(v, r)$ pedig a tömegfüggvény deriváltjával áll kapcsolatban:

$$\psi(v, r) = \frac{3\epsilon}{\kappa^2 r^3} \frac{dm}{dv} .$$

Az ϵ a sugárzás irányát adja meg: $\epsilon = 1$ esetén a sugárzás a centrumba tart (bemenő), $\epsilon = -1$

esetén pedig a centrumból jön (kimenő).

A magasabb dimenziós téridőben jelen lévő sugárzás forrásául szolgálhat a brán, mivel nagy energiákon ($\rho > \lambda$) a részecske kölcsönhatások képesek a plusz dimenzióba jutó gravitonokat produkálni. Feltéve, hogy az emittált gravitonok radiális irányban haladnak, az 5d téridő $VAdS_5$. A ψ függvényt a sugárzás-dominálta időszakban ($p = \rho/3$) [192]-ben számolták:

$$\psi = \frac{\kappa_5^2}{12} \alpha \rho^2, \quad (2.227)$$

ahol α egy kis, dimenziótlan konstans. Ilyen sugárzás esetén a brán kozmológiai evolúcióját vizsgálták mind a brán szimmetrikus beágyazása [192], mind aszimmetrikus beágyazása mellett [193], [194]. Egy realisztikusabb leírást, amikor az emittált gravitonok geodetikusokat követnek [195]-ben tárgyaltak.

Egy másik lehetőség az 5d sugárzás megjelenésére, amikor forrásául 5d objektum szolgál. A brán-világ modellekben standard anyag csak a bránon létezik. Ezért a magasabb dimenziós sugárzásnak nem standard természetűnek kell lennie. Ilyen esetet szolgáltat a magasabb dimenziós fekete lyuk Hawking sugárzása. A Hawking sugárzás a horizonton kívüli, de ahhoz közeli részecske pár keletkezéseként képzelhető el, amikor a görbület miatt a pozitív energiájú a fekete lyukat tipikusan elhagyja, amíg a negatív energiájú a fekete lyukba "hull" [196], [197]. A bránt érő sugárzás egy részét a brán elnyeli, más részét átterszi, illetve visszaveri. A brán mozgását olyan téridőben, ahol az egyes 5d régiók tartalmazznak egy-egy párolgó fekete lyukat, és a brán az összes öt ért sugárzást átengedi [198]-ban vizsgálták, azzal a feltevéssel, hogy az egyes 5d régiók $VAdS_5$ régiók. Azonban a $VAdS_5$ téridőben csak egykomponensű sugárzás van jelen. Nincs olyan ismert egzakt megoldása az 5d Einstein egyenletnek, amely kozmológiai állandó jelenlétében kétkomponensű sugárzást ír le, ezért a visszavert sugárzás esetét nem vizsgáljuk. Az általános relativitáselméletben olyan téridőt, amely tartalmaz mind bemenő, és kimenő sugárzást, de nincs kozmológiai állandó [199]-ben találtak, azonban ennek nincs magasabb dimenziós általánosítása. Egykomponensű null por esetén az egyes 5d régiók $VAdS_5$ régiók. Mivel vizsgálni kívánjuk azt az esetet is, amikor a brán nem nyeli el az összes öt ért sugárzást, fekete lyukat csak az egyik 5d régióba teszünk, ahogy az a 2.2. ábrán látható. A Friedmann brán beágyazása a magasabb dimenziós téridőbe ezáltal aszimmetrikus. További aszimmetriát, amely az 5d kozmológiai állandón keresztül jelenhetne meg, nem teszünk fel. Az aszimmetrikus beágyazás miatt van egy sugárzási nyomás, amely csak a brán egyik oldalán jelenik meg. Ez a folytonos nyomás elvben jelenthet sötét energiát. Korai univerzumot vizsgálunk, ahol a brán sugárzás-dominálta.

A Friedmann brán beágyazási relációja: $v = v(\tau)$ és $r = a(\tau)$, ahol τ a kozmológiai idő, amit az u időszerű egységvektorhoz adaptálunk a bránon:

$$u = \frac{\partial}{\partial \tau} = \dot{v} \frac{\partial}{\partial v} + \dot{a} \frac{\partial}{\partial r}. \quad (2.228)$$

Mivel $u^a u_a = -1$, ezért a bránon teljesül, hogy

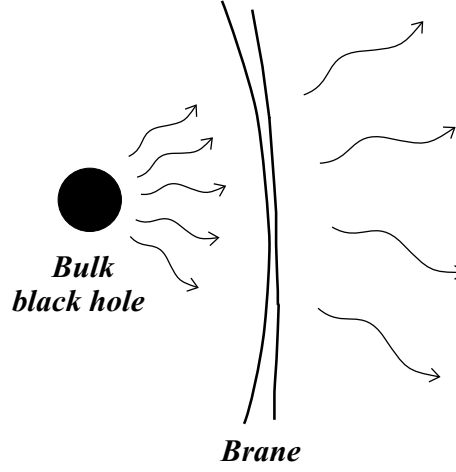
$$f \dot{v} = -\dot{a} + (\dot{a}^2 + f)^{1/2}, \quad (2.229)$$

ahol a pozitív gyököt választottuk, azért hogy \dot{v} pozitív legyen. Így a brán helyzeténél Eddington-Finkelstein és Gauss normál koordinátákban az u_a időszerű 1-forma mező:

$$u = -(\dot{r}^2 + f)^{1/2} dv - \dot{v} dr = -d\tau, \quad (2.230)$$

a brán normális 1-forma mező n_a :

$$n = -\dot{r} dv + \dot{v} dr = dy, \quad (2.231)$$



2.2. ábra. Az 5d fekete lyukból származó sugárzást a brán részben elnyeli, részben áteresztí.

és az l_a jövő irányított null 1-forma:

$$l = -\frac{dv}{\dot{v}} = n + u . \quad (2.232)$$

A sugárzás energia-impulzus tenzorában megjelenő ψ függvény a bránon:

$$\psi = -\frac{3\dot{m}\dot{v}}{\tilde{\kappa}^2 a^3} . \quad (2.233)$$

A \dot{v} (2.229) kifejezésében szereplő négyzetgyök eliminálható felhasználva az alábbi kifejezéseket

$$\begin{aligned} (\dot{a}^2 + f_{R,L})^{1/2} &= \pm \bar{B} + \frac{\Delta B}{2} , \\ \bar{B} &= -\frac{\tilde{\kappa}^2 a}{6} (\rho + \lambda) , \\ \Delta B &= \frac{6\Delta m}{\tilde{\kappa}^2 a^3 (\rho + \lambda)} , \end{aligned} \quad (2.234)$$

amelyeket [130]-ban származtattak le. Itt Δ , és a felülvonás jelöli a mennyiségek brán jobb és baloldalánál vett értékeinek különbségét, illetve átlagát. A brán egyes oldalain a (2.229), (2.233) és (2.234) egyenletek adnak egy kifejezést a $\psi_{R,L}$ függvényre:

$$\psi_{R,L} = -\frac{3\dot{m}_{R,L}}{\tilde{\kappa}^2 a^3 f_{R,L}} \left[-\dot{a} \mp \frac{\tilde{\kappa}^2 a}{6} (\rho + \lambda) + \frac{3\Delta m}{\tilde{\kappa}^2 a^3 (\rho + \lambda)} \right] , \quad (2.235)$$

ahol az L és R indexek jelölik a brán bal, illetve jobboldalát. Ezért a $\Delta\psi$ és $\bar{\psi}$ mennyiségek kifejezhetők, mint

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= \frac{3}{2\tilde{\kappa}^2 a^3} \left[\dot{a} - \frac{3\Delta m}{\tilde{\kappa}^2 a^3 (\rho + \lambda)} \right] (2\bar{m}F_- + \Delta\dot{m}F_+) \\ &\quad + \frac{1}{4a^2} (\rho + \lambda) (2\bar{m}F_+ + \Delta\dot{m}F_-) , \end{aligned} \quad (2.236)$$

$$\begin{aligned}\bar{\psi} = & \frac{3}{4\tilde{\kappa}^2 a^3} \left[\dot{a} - \frac{3\Delta m}{\tilde{\kappa}^2 a^3 (\rho + \lambda)} \right] (2\bar{m}F_+ + \Delta\dot{m}F_-) \\ & + \frac{1}{8a^2} (\rho + \lambda) (2\bar{m}F_- + \Delta\dot{m}F_+) ,\end{aligned}\quad (2.237)$$

ahol a következő egyszerűsítő jelölések kerültek bevezetésre:

$$F_- = \frac{1}{f_R} - \frac{1}{f_L} = \frac{2a^2\Delta m}{(a^2\bar{f})^2 - (\Delta m)^2} , \quad (2.238)$$

$$F_+ = \frac{1}{f_R} + \frac{1}{f_L} = \frac{2a^4\bar{f}}{(a^2\bar{f})^2 - (\Delta m)^2} , \quad (2.239)$$

$$a^2\bar{f} = \left(\frac{\kappa^2\lambda}{6} - \frac{\Lambda_0}{3} \right) a^4 + ka^2 - 2\bar{m} . \quad (2.240)$$

A nem azonosan nulla brán egyenletek az energia mérleg (2.132):

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = -\Delta\psi , \quad (2.241)$$

a Raychaudhuri (2.131):

$$\begin{aligned}\frac{\ddot{a}}{a} = & -\frac{\kappa^2}{6} \left[\rho \left(1 + \frac{2\rho}{\lambda} \right) + 3p \left(1 + \frac{\rho}{\lambda} \right) \right] - \frac{2\bar{m}}{a^4} \\ & + \frac{27(p - \lambda)(\Delta m)^2}{\tilde{\kappa}^4 a^8 (\rho + \lambda)^3} - \frac{\tilde{\kappa}^2 \bar{\psi}}{3} - \frac{3\Delta m \Delta\psi}{\tilde{\kappa}^2 a^4 (\rho + \lambda)^2}\end{aligned}\quad (2.242)$$

és a Friedmann (2.130):

$$\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = \frac{\kappa^2 \rho}{3} \left(1 + \frac{\rho}{2\lambda} \right) + \frac{2\bar{m}}{a^4} + \frac{9(\Delta m)^2}{\tilde{\kappa}^4 a^8 (\rho + \lambda)^2} . \quad (2.243)$$

A (2.235)-(2.243) egyenletrendszer adja a brán mozgását az 5d téridőben. Bennük a $\bar{\psi}$ és $\Delta\psi$ mennyiségek szabad függvényként jelennek meg, szerepük egyenértékű \bar{m} és $\Delta\dot{m}$ -al (lásd: (2.236)-(2.237)).

SAdS₅ téridőben lévő párolgó fekete lyuk időegység alatti tömegveszteségét [200]-[202] származtatták $k = 1$ görbületi paraméter esetén. Feltesszük [198]-hez hasonlóan, hogy ez a kiszámolt tömegveszteség megegyezik a VAdS₅ téridőben az $m_L(v)$ (a tömegfüggvénynek a brán baloldalán vett értéke) függvény csökkenésével. A [198] cikkben ezt a feltevést elfogadták tetszőleges k esetén, és numerikus eredményeket $k = 0$ -ra közöltek. Itt ezt a megfeleltetést csak $k = 1$ -re fogadjuk el, amelyre a [200]-[202] eredményei érvényesek. Ekkor a fekete lyukból eljövő sugárzás értéke a brán baloldalán

$$\psi_L = \frac{5\zeta(5)}{24\pi^9 a^3 m_L \left[\dot{a} + (\dot{a}^2 + f_L)^{1/2} \right]} , \quad (2.244)$$

ahol ζ a Riemann-zeta függvény. Itt m_L tartalmazza a fekete lyuk tömegét és a Hawking sugárzás energiáját. A fénysebességgel terjedő sugárzás eléri a bránt, amely szubluminálisan mozog, így $\dot{m}_{R,L} < 0$. Itt m_R a tömegfüggvénynek a brán jobboldalán vett értéke. Mivel a brán elnyeli a sugárzás egy részét, így $\dot{m}_L < \dot{m}_R < 0$ és $\Delta\psi < 0$.

A Friedmann egyenletet átírva a Δm kifejezhető a brán kozmologiai folyadék ρ energiasű-

rűsége, az a skálafaktor, és a H Hubble paraméter függvényeként:

$$(\Delta m)^2 = \frac{2\kappa^2}{3\lambda} a^8 (\rho + \lambda) \left[H^2 + \frac{\bar{f}}{a^2} - \frac{\kappa^2}{6\lambda} (\rho + \lambda)^2 \right]. \quad (2.245)$$

Mivel m_R tartalmaz járulékot m_L -en túl a brán energia-impulzusából, ezért $\Delta m > 0$. Azonban Δm nem a brán tömege, csupán a brán két oldala közötti különbség a tömegfüggvényekben. Az ok amiért $m_R \neq m_L$ az, hogy a brán járulékot ad a tömegfüggvényhez mind az energia-impulzusán, mind a görbületén keresztül. Kevésbé szigorú értelemben Δm a brán energia tartalmának mértékéül szolgál.

A sugárzás energia-impulzus tenzorának (2.226) u_a négyes sebességgel mozgó brán megfigyelő szerinti felbontása:

$$\left(\tilde{T}_{R,L}^{ND} \right)_{ab} = \psi_{R,L} (u_a u_b + 2u_{(a} n_{b)} + n_a n_b) , \quad (2.246)$$

amelynek különbsége a brán két oldala között

$$\Delta \tilde{T}_{ab}^{ND} = \Delta \psi (u_a u_b + 2u_{(a} n_{b)} + n_a n_b) = -(\rho^{rad} u_a u_b + 2q_{(a}^{rad} u_{b)} + p^{rad} n_a n_b) \delta(y) .$$

Ezért a sugárzás brán két oldala közötti különbsége a bránon porként jelenik, melynek energia-sűrűsége: $\rho^{rad} \sim (-\Delta\psi) > 0$. A magasabb dimenzióból érkező, a bránt érő sugárzás energia fluxusa: $q_a^{rad} \sim (-\Delta\psi) n_a$, illetve nyomása: $p^{rad} \sim (-\Delta\psi) > 0$. Utóbbi a brán mozgását gyorsítja. A sugárzási nyomás okozta gyorsító hatás a (2.242) Raychaudhuri egyenlet utolsó tagjában jelenik meg.

Részleges abszorpció esetén $\psi_R = \varepsilon \psi_L$, ahol az ε paraméter a transzmisszió mértékét jelöli, amely nulla a brán teljes abszorpciója esetén és egy, ha a brán a Hawking sugárzást teljesen átengedi. A $\psi_R = \varepsilon \psi_L$ feltétel miatt a $\bar{\psi}$ és $\Delta\psi$ mennyiségek nem függetlenek egymástól. Ennek következményeként a (2.243) Friedmann egyenlet, a (2.241) energia mérleg és a (2.242) Raychaudhuri egyenlet első integráljává válik. Általános relativitáselméletben ez mindig így van, azonban brán-világok esetén csak speciális esetekben.

Numerikus analízis céljából az alábbi dimenziótlan változókat vezetem be

$$\begin{aligned} \hat{t} &= Ct, \quad \hat{a} = Ca, \quad \hat{H} = \frac{H}{C}, \\ \hat{\rho} &= \frac{\rho}{\lambda}, \quad \hat{p} = \frac{p}{\lambda}, \quad \hat{\psi} = \frac{\psi_L}{C\lambda}, \\ \widehat{\Delta m} &= C^2 \Delta m, \quad \widehat{\bar{m}} = C^2 \bar{m}, \end{aligned} \quad (2.247)$$

ahol $C = \kappa\sqrt{\lambda}$, aminek inverze adja a távolság skálát.

Az új változókbán az energia mérleg

$$\hat{\rho}' + 3\hat{H}(\hat{\rho} + \hat{p}) = (1 - \varepsilon)\hat{\psi}, \quad (2.248)$$

a Raychaudhuri

$$\begin{aligned} \hat{H}' &= -\hat{H}^2 - \frac{\hat{\rho}}{6}(1 + 2\hat{\rho}) - \frac{\hat{p}}{2}(1 + \hat{\rho}) - \frac{2\widehat{\bar{m}}}{\hat{a}^4} \\ &\quad + \frac{9(\hat{p} - 1)\widehat{\Delta m}^2}{2\hat{a}^8(1 + \hat{\rho})^3} - \frac{(1 + \varepsilon)\hat{\psi}}{\sqrt{6}} + \frac{3(1 - \varepsilon)\hat{\psi}\widehat{\Delta m}}{\sqrt{6}\hat{a}^4(1 + \hat{\rho})^2}, \end{aligned} \quad (2.249)$$

és a Friedmann egyenlet

$$\widehat{H}^2 = -\frac{1}{\widehat{a}^2} + \frac{\widehat{\rho}}{3} \left(1 + \frac{\widehat{\rho}}{2}\right) + \frac{2\widehat{m}}{\widehat{a}^4} + \frac{3\widehat{\Delta m}^2}{2\widehat{a}^8 (1 + \widehat{\rho})^2}, \quad (2.250)$$

ahol a vessző a \widehat{t} szerinti deriválást jelenti. A (2.234) egyenlet felhasználásával eliminálva a négyzetgyököket (2.244)-ből, a sugárzás értéke a brán baloldalán:

$$\widehat{\psi} = \frac{\beta}{\widehat{a}^4 \widehat{m}_L \left[\widehat{H} + \frac{\widehat{\rho}+1}{\sqrt{6}} + \frac{3\widehat{\Delta m}}{\sqrt{6}\widehat{a}^4(\widehat{\rho}+1)} \right]}, \quad (2.251)$$

ahol $\beta = 40\zeta(5) (M_T/M_P)^4 / (3\pi^7)$ és $\widehat{m}_L = \widehat{m} - \widehat{\Delta m}/2$. A $\widehat{\Delta m}$ és \widehat{m} változása következik (2.229), (2.233), (2.244) és $\psi_R = \varepsilon\psi_L$ -ből

$$\widehat{m}' = -\frac{\widehat{a}^4 \widehat{\psi}}{\sqrt{6}} \left\{ (1 + \varepsilon) \left[\widehat{H} + \frac{3\widehat{\Delta m}}{\sqrt{6}\widehat{a}^4(\widehat{\rho}+1)} \right] + (1 - \varepsilon) \frac{\widehat{\rho}+1}{\sqrt{6}} \right\}, \quad (2.252)$$

$$\widehat{\Delta m}' = \frac{2\widehat{a}^4 \widehat{\psi}}{\sqrt{6}} \left\{ (1 - \varepsilon) \left[\widehat{H} + \frac{3\widehat{\Delta m}}{\sqrt{6}\widehat{a}^4(\widehat{\rho}+1)} \right] + (1 + \varepsilon) \frac{\widehat{\rho}+1}{\sqrt{6}} \right\}. \quad (2.253)$$

A (2.248), (2.249) és (2.251)-(2.253) egyenletek egy $\widehat{p}(\widehat{\rho})$ állapot-egyenlet ismeretében zárt rendszert alkotnak. A (2.250) egyenlet az integrálás pontosságának ellenőrzésére használható.

Mivel a fekete lyuk evaporációja nem függ a transzmisszió mértékétől, így \widehat{m}_L függvény evolúciója (2.251)-(2.253) egyenletekből

$$\widehat{m}_L' = -\frac{2\beta}{\sqrt{6}\widehat{m}_L}, \quad (2.254)$$

integrálható:

$$\widehat{m}_L(\widehat{t}) = \sqrt{\widehat{m}_L^2(\widehat{t}_0) + \frac{4\beta}{\sqrt{6}}(\widehat{t}_0 - \widehat{t})}. \quad (2.255)$$

A sugárzás a bránt a $\widehat{t} = \widehat{t}_0$ -ban éri el. A brán tömegfüggvény \widehat{m}_L monoton csökken egészen $\widehat{t}_C = \widehat{t}_0 + \sqrt{6}\widehat{m}_L^2(\widehat{t}_0)/4\beta$ -ig, amikor eléri a nulla értéket. Amikor ez megtörténik a fekete lyuk már teljesen elpárolgott.

A korai univerzum fejlődési szakaszát vizsgáljuk. Feltesszük, hogy a brán kezdeti helyzete a \widehat{t}_0 -ban a fekete lyuk látszó horizontjánál van

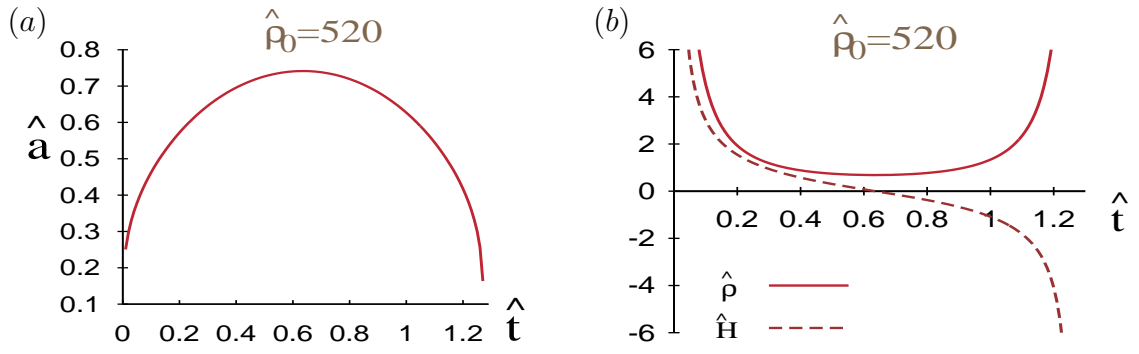
$$\widehat{r}_{AH} = \sqrt{-3 + \sqrt{9 + 12\widehat{m}_L}}. \quad (2.256)$$

Ez a horizont dinamikus, mivel \widehat{m}_L időben csökken. Az $\widehat{m}_L(\widehat{t}_0) = 0.01$ esetén a látszó horizont kezdeti helyzete 0.1411870178. Az evolúciós egyenletekben megjelenő $\widehat{\Delta m}$ kezdeti értékét 0.29-nek választottam. Sugárzás dominálta kozmológiai korszakot vizsgállok, ezért $\widehat{p} = \widehat{\rho}/3$. A β -ban megjelenő szabad paramétert M_T/M_P -t 1/10-nek választom.

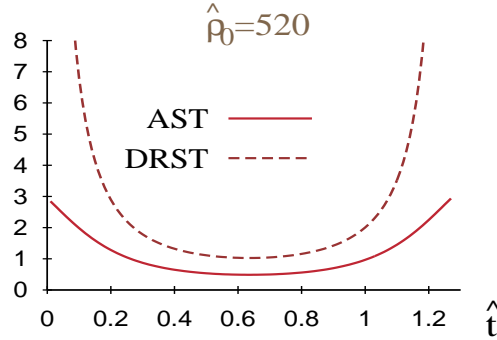
2.4.1. Brán-világok evolúciója párolgás mentes 5d fekete lyuk esetén

Párolgás mentes fekete lyuk esetén a Friedmann egyenletben túl a standard energiasűrűsége ρ és a görbületi forrás tagon $\propto \rho^2$, megjelenik egy sötét sugárzási tag $\propto \widehat{m}/a^4$ és egy aszimmetrikus beágyazási tag $\propto (\Delta m)^2$. Hawking sugárzás nélkül $\widehat{\Delta m} = \text{const}$.

A skálafaktor viselkedése (2.3a ábra) mutatja, hogy párolgás mentes fekete lyuk esetén a brán univerzum hasonlóan viselkedik, mint az általános relativitáselméletbeli zárt univerzum. A



2.3. ábra. (a) A skálafaktor, (b) a Hubble paraméter (szaggatott vonal) és a brán energia sűrűség (folytonos vonal) időfejlődése Hawking sugárzás hiányában. Mindkét ábrán $\hat{\rho}_0 = 520$.



2.4. ábra. A Friedmann egyenlet sötét sugárzás (DRST, szaggatott vonal) és az aszimmetria (AST, folytonos vonal) forrás tagjainak időfejlődése $\hat{\rho}_0 = 520$ kezdeti brán energiasűrűség esetén.

Hubble paraméter és a brán energiasűrűség is ennek megfelelően változik. A Hubble paraméter monoton csökken, amíg az energiasűrűség a végtelenhez tart mind a brán univerzum korai, mind a késői fejlődési szakaszában (2.3b ábra).

A sötét sugárzási tag

$$\frac{2\hat{m}}{\hat{a}^4}, \quad (2.257)$$

és az aszimmetria forrás tag

$$\frac{3 \left(\widehat{\Delta m} \right)^2}{2\hat{a}^8 (\hat{\rho} + 1)^2} \quad (2.258)$$

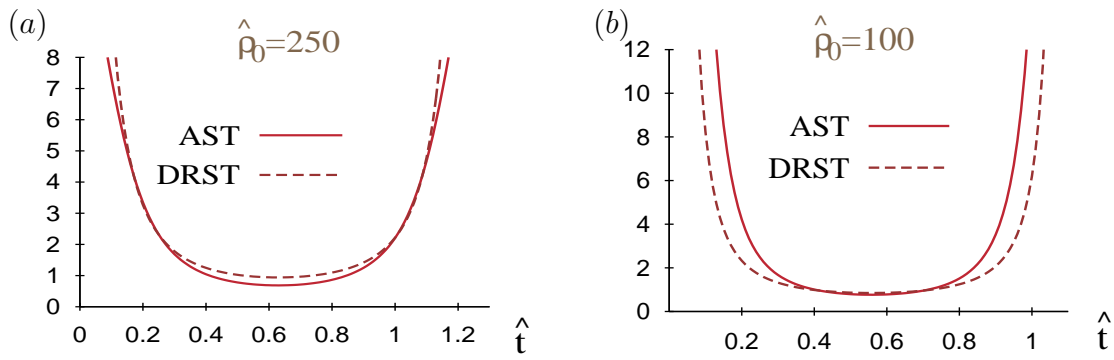
evolúcióját a 2.4. ábra mutatja. Mindkét tag pozitív, így hasonlóan hatnak, mint a szokásos anyagi források a Friedmann egyenletben. A sötét sugárzási tag dominál az aszimmetria tag fölött az egész evolúció során, a különbségük pedig egyre kisebb, ahogy a brán eléri maximális méretét.

Kisebb kezdeti brán energiasűrűség esetén a sötét sugárzási és az aszimmetria tag összemérhetővé válik (2.5a ábra). Még kisebb kezdeti brán energiasűrűségekre pedig az aszimmetria tag dominál (2.5b).

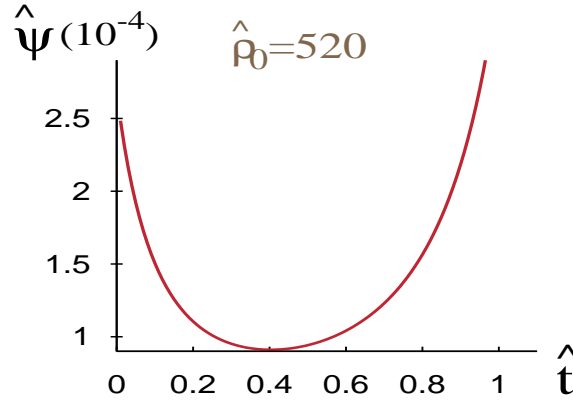
2.4.2. A Hawking sugárzás

A Hawking sugárzás értékének fejlődését a brán baloldán $\hat{\psi}$ a 2.6. ábra mutatja.

A brán tágulásának szakaszában $\hat{\psi}$ élesen csökken. Ez a brán és a fekete lyuk horizont távolsága növekedésének köszönhető. Amikor a zárt univerzum eléri maximális értékét $\hat{\psi}$ elkezd növekedni, ami tart abban a korszakban is, amikor a brán összehúzódik. A sugárzás magasabb értéke a brán összehúzódásának végső szakaszában matematikailag a (2.251) egyenlet nevezőjében szereplő \hat{H} monoton csökkenésének eredménye. Fizikai néző szempontból $\psi \propto \dot{\psi}$ (lásd



2.5. ábra. Ugyanaz látható, mint 2.4. ábrán (a) $\hat{\rho}_0 = 250$ és (b) $\hat{\rho}_0 = 100$ kezdeti brán energiasűrűségek esetén.



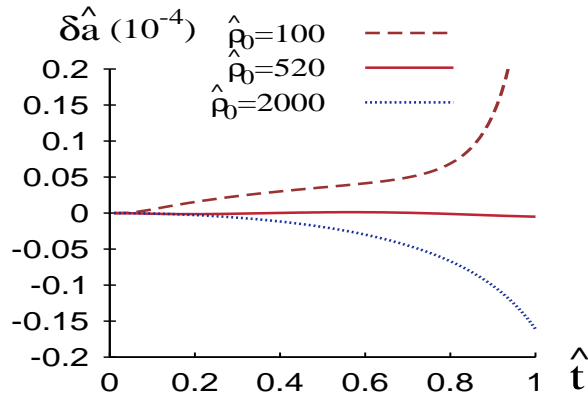
2.6. ábra. A Hawking sugárzás evolúciója $\hat{\rho}_0 = 520$ esetén.

(2.233) egyenlet), ezért $\hat{\psi}$ a Doppler effektusnak köszönhetően az összehúzódás végén nagyobb lesz, mint a tágulás kezdetén. A skálafaktor ugyanazon értékénél az összehúzódó brán több energiát nyel el időegységenként, mint a táguló szakaszban.

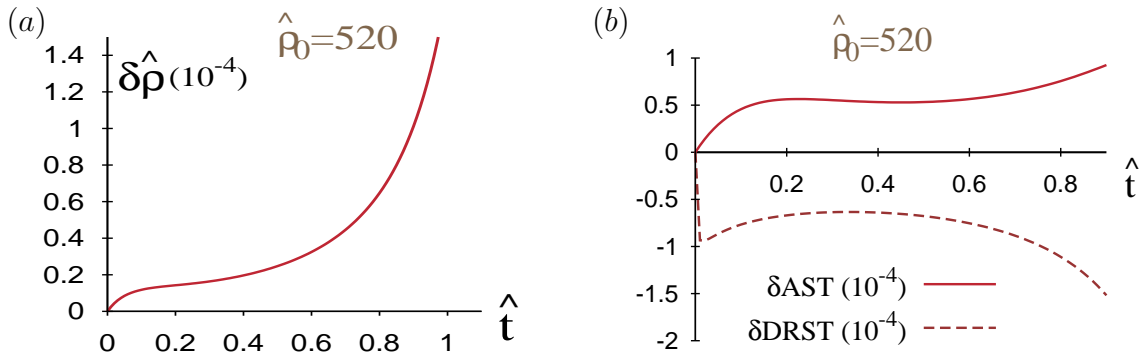
2.4.3. Nem átlátszó brán-világok evolúciója Hawking sugárzás jelenlétében

Teljes abszorpció esetén $\varepsilon = 0$ és az m_R tömegfüggvény konstanssá válik. A Hubble paraméter, a skálafaktor, a brán energiasűrűség és a Friedmann egyenlet különböző forrás tagjainak evolúciója nagyon hasonló párolgó fekete lyuk esetén ahhoz képest, mint amikor nincs sugárzás jelen az 5d téridőben. Ez két ellentétes hatásnak köszönhető. A sugárzási nyomás gyorsítja a brán mozgását a magasabb dimenziós téridőben. Azonban az elnyelt sugárzás növeli a brán öngravitációját, amely a brán növekvő összehúzódását eredményezi. A sugárzás miatti kis effektusokat a párolgó, illetve a párolgás mentes fekete lyuk esetében történő evolúciók közötti különbségekként ábrázoltam a skálafaktor, a brán energiasűrűség és a Friedmann egyenlet különböző forrástagjainak időfejlődésében. Az ábrák a $\delta A = A_\psi - A$ -t mutatják, ahol A_ψ jelöli a mennyiségeket Hawking sugárzás jelenlétében és A , amikor nincs jelen sugárzás a magasabb dimenziós téridőben.

A 2.7. ábra mutatja a skálafaktor különbségét a sugárzás és a sugárzás mentes esetek között három kezdeti brán energiasűrűség esetén. $\hat{\rho}_0 = 520$ esetén közel kritikus viselkedést tapasztalható. A skálafaktorok közötti különbség közel nulla, de szinuszos viselkedést mutat. Nagyobb kezdeti brán energiasűrűség esetén a skálafaktor értéke kisebb az egész kozmológiai evolúció során a Hawking sugárzás jelenlétében. Ez azt jelenti, hogy a brán elnyelt sugárzás miatti öngravitációja dominál a sugárzási nyomás fölött. Kisebb kezdeti brán energiasűrűségekre pedig, mint a kritikus, a sugárzási nyomás dominál az elnyelt sugárzás öngravitációja fölött.



2.7. ábra. A skálafaktor különbségének időfejlődése azon esetek között, amikor Hawking sugárzás jelen van és amikor nincs. A közel kritikus viselkedést $\hat{\rho}_0 = 520$ esetén folytonos vonal mutatja. Ekkor a brán növekvő öngravitációja és a sugárzási nyomás közel kompenzálja egymást. A szaggatott vonal mutatja $\hat{\rho}_0 = 100$ esetén a sugárzási nyomás dominanciáját. Magasabb kezdeti brán energiasűrűség esetén, mint a kritikus ($\hat{\rho}_0 = 2000$), az alsó pontozott vonal mutatja, hogy a növekvő brán öngravitáció dominál a sugárzási nyomás fölött.



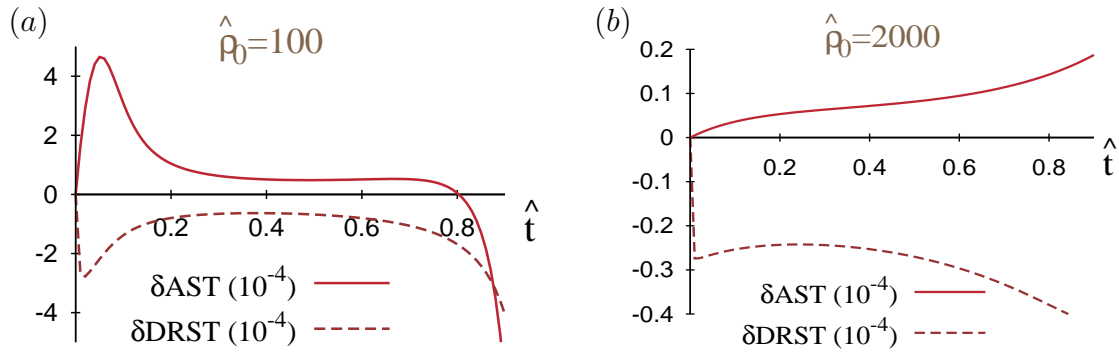
2.8. ábra. A Hawking sugárzás okozta perturbációk láthatók $\hat{\rho}_0 = 520$ kezdeti értékre. (a) A brán energiasűrűség perturbációja. (b) A Friedmann egyenlet két forrástagjának időfejlődése a nem sugárzó fekete lyuk esetéhez képest. Az aszimmetria forrástagot (δ_{AST} , folytonos vonal) növeli, míg a sötét sugárzási forrás tagot (δ_{DRST} , szaggatott vonal) csökkenti a Hawking sugárzás.

A brán energiasűrűségében fellépő különbséget a két eset között a 2.8a ábra illusztrálja. A korábbi ábrák közül a 2.3. és 2.4. ábrák, illetve a 2.8a ábra a kritikus kezdeti brán energiasűrűség mellett készültek. Más kezdeti brán energiasűrűségekre ezeken az ábrákon a skála változik csupán, de hasonló tulajdonságokat mutatnak.

Ez nem igaz azonban a Friedmann egyenlet sötét sugárzás és az aszimmetria forrás tagjára. Párolgás mentes fekete lyuk esetén is igen különböző viselkedést mutattak a 2.4-2.5 ábrák különböző kezdeti brán energiasűrűségekre. A Friedmann egyenlet e két forrástagjában a Hawking sugárzás által okozott különbségeket a 2.8b és 2.9 ábrák mutatják kritikus kezdeti energiasűrűsége (2.8b ábra), sokkal könnyebb bránra (2.9a ábra) és sokkal nehezebb bránra (2.9b ábra). Az univerzum korai és végső fejlődési szakaszának kivételével a két járulék nagyjából kioltja egymást kritikus kezdeti energiasűrűségekre. Könnyű bránokra az aszimmetria tag növekedése a dominánsabb, míg nehéz bránokra a sötét sugárzási tag csökkenése.

Diszkusszió

A numerikus analízisben alkalmazott választás $M_T/M_P = 1/10$ és a Planck tömeg értéke $M_P \approx 10^{19}$ GeV eredményezi, hogy $M_T \approx 10^{15}$ TeV. Mivel $\lambda = (M_T)^4 = 10^{60}$ TeV⁴, ezért a 1.6. fejezetben felsorolt alsó korlátot λ -ra teljesíti. Ez a választás egyezésben van a [147]-ben található 1. ábrán látható λ tartománnyal. Az ok, amiért ilyen magas értéket választottam λ -



2.9. ábra. Ugyanaz látható, mint 2.8b ábrán (a) $\hat{\rho}_0 = 100$ és (b) $\hat{\rho}_0 = 2000$ kezdeti értékekre. A fő különbség 2.8b ábrához képest, hogy könnyű bránok esetében az aszimmetria tag gyorsabban nő a korai fejlődési szakaszban, mint ahogy a sötét sugárzási tag csökken (a) ábra, míg nehéz bránokra a sötét sugárzási tag csökkenése dominál az aszimmetria forrás tag növekedése fölött (b) ábra.

ra a következő. Csökkenő λ , csökkenő M_T -t jelentene. Mivel ψ arányos $(M_T/M_P)^4$ -el (lásd (2.251) egyenletet), egy jelentősen kisebb λ kisebb Hawking sugárzást eredményezne, így a sugárzás hatását a fellépő numerikus hibák elfednék.

A választás \hat{m}_R -re és \hat{m}_0 -ra fölötté van annak a limitnek, amit [111] és [203]-ban származtattak a sötét sugárzási tagra a BBN-ből. Azonban ezek a limitek a brán szimmetrikus beágyazása mellett és brán kozmológiai állandó jelenlétében voltak származtatva.

2.6. táblázat. A Hawking sugárzás kicsi változást idéz elő a dimenziómentes tömegfüggvény értékében a brán baloldalán. A rekollapszus végén az \hat{m}_L értéke minimális kritikus brán energiasűrűség esetén.

\hat{m}_L	$\hat{\rho}_0 = 100$	$\hat{\rho}_0 = 520$	$\hat{\rho}_0 = 2000$
$\hat{t} = 0$	0.01	0.01	0.01
$\hat{t} = 1.115$	0.0099582386	0.0099582385	0.0099582387

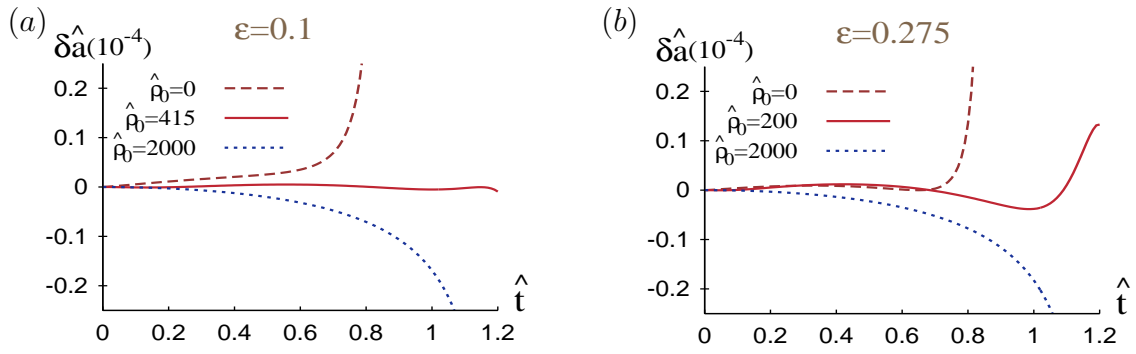
A sötét sugárzási tag át tudja-e venni a kozmológiai állandó szerepét gyorsuló tágulást okozva? Nem. Bár a sötét sugárzási tag pozitív $2\bar{m}/a^4$ ($\bar{m} > 0$ esetén) járulékot ad a (2.260) Friedmann egyenletben, azonban a (2.242) Raychaudhuri egyenletben negatív előjellel jelenik meg. Ezért a standard kozmológiához képest a sötét sugárzási tag a kozmikus tágulást növeli, de lassítja azt. Ha \bar{m} negatív, akkor ez épp fordítva történik, de ezt nem engedtem meg a modellben.

Numerikus adatokkal alátámasztható-e, hogy a magasabb dimenzióban jelenlévő sugárzásnak a bránra gyakorolt nyomása képes inflációt eredményezni? A vizsgált modellben nem ez történik. Sugárzás hiányában a skálafaktor egy tipikus zárt univerzum fejlődését mutatja 2.3. ábra. Az infláció exponenciális tágulást jelentene, de párolgó fekete lyukra sem tapasztaljuk ezt, amit a 2.3 és 2.7. ábra mutat. A fizikai mennyiségek eltérése párolgó fekete lyuk esetében a nem sugárzó esethez képest 10^{-4} nagyságrendű.

A brán által elnyelt sugárzás viselkedhet-e skalármezőként a lassan gördülő korszakban? A (2.247) egyenlet mutatja, hogy az elnyelt sugárzás egy sötét porként interpretálható a bránon, amely nyomás mentes folyadékot jelent. Ezért a lassan gördülés feltételeit nem teljesíti.

Mivel egy zárt univerzumot vizsgáltunk ($k = 1$) nyilvánvaló kérdés, hogy a sugárzási nyomás képes-e megállítani az univerzum összeomlását eredményezve egy újbóli táguló korszakot? Megállapításra került, hogy nem, az univerzum összeomlik. Ennek magyarázata abban rejlik, hogy a bránt érő külső sugárzás két egymással ellentétes hatást okoz. A sugárzási nyomás gyorsítja, míg az elnyelt sugárzás növekvő brán öngravitációt okoz, ezáltal lassítja a brán tágulását.

A numerikus vizsgálat mutatja, hogy a növekedés ρ^{rad} -ban az elnyelt sugárzás miatt nem jelentős a brán anyag energiasűrűségéhez képest (2.8a ábra). Hawking sugárzás jelenlétében a brán energiasűrűség mindössze 10^{-4} rendű változáson esik át ahhoz képest, amikor nincs



2.10. ábra. (a) A Hawking sugárzás okozta különbség a dimenziómentes skálafaktor időfejlődésében. $\varepsilon = 0.1$ transzmisszió esetén a közel kritikus viselkedés $\delta\hat{a} \approx 0$ a $\hat{\rho}_0^{crit} = 415$ kezdeti brán energiasűrűség mellett figyelhető meg (folytonos vonal). A kritikus viselkedés kisebb $\hat{\rho}_0^{crit}$ értéknél van, mint $\varepsilon = 0$ -ra (ekkor $\hat{\rho}_0^{crit} = 520$ volt, lásd 2.7. ábra). Könnyű bránokra (a $\hat{\rho}_0 = 0$ extrém esetet a szaggatott vonal mutatja) a Hawking sugárzás nyomása dominál. Nehéz bránokra ($\hat{\rho}_0 = 2000$, pontozott vonal) az abszorpció miatti brán öngravitáció növekedése dominál a sugárzási nyomás fölött. (b) Ugyanaz látható mint az (a) ábrán nagyobb transzmisszióra $\varepsilon = 0.275$. A kritikus kezdeti brán energiasűrűség tovább csökken $\hat{\rho}_0^{crit} = 200$ -ra (folytonos vonal). Továbbá a $\delta\hat{a}$ szinuszos viselkedésének amplitúdója megnövekszik tompítva ezáltal a $\delta\hat{a}$ kritikus jellegét a kisebb abszorpciókhoz képest.

jelen 5d sugárzás. Ezen a ponton fontos megjegyezni, hogy a vizsgálatok a sugárzás-dominálta kozmológiai korszakban történtek. Ezzel szemben minden anyag, amit a brán a sugárzásból elnyel porként jelenik meg a bránon [lásd (2.247) egyenlet]. Mivel az elnyelt sugárzás a brán anyag energiasűrűségének csak kis hányadát teszi ki, így a brán továbbra is sugárzás-dominálta marad.

A fizikai mennyiségekben még nagy brán-feszültség esetén ($\lambda = 10^{60} \text{ TeV}^4$) is csupán 10^{-4} rendű változást tapasztaltunk párolgó fekete lyuk esetén. A Hawking sugárzás energiasűrűsége olyan kicsi, hogy az 5d fekete lyuk tömegében nem következik be drasztikus változás a brán kozmológiai evolúciója során, így a brán tömege sem növekszik jelentősen az abszorbált sugárzás miatt. Ez könnyen látható abból, hogy az (2.255) egyenletben a $\hat{t} - \hat{t}_0$ együthatója $M_T/M_P = 1/10$ választás esetén

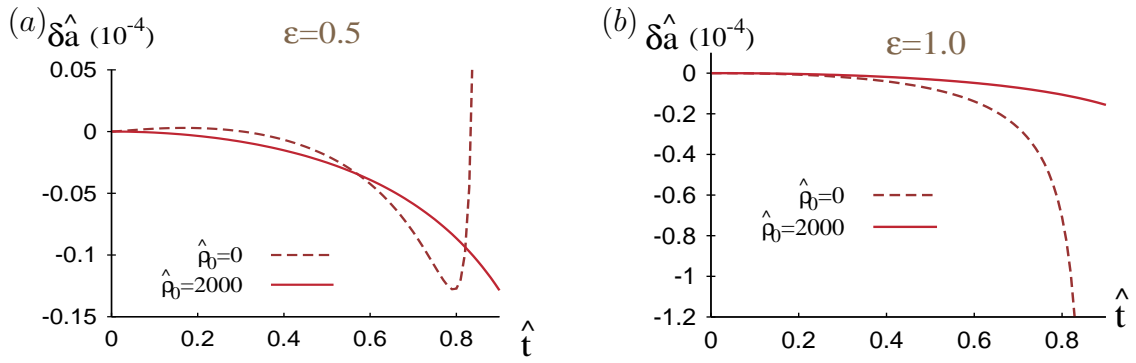
$$\frac{4\beta}{\sqrt{6}} = \frac{160\zeta(5)}{3\sqrt{6}\pi^7} \times 10^{-4} \approx 7.475 \times 10^{-7}. \quad (2.259)$$

Ezért a tömegfüggvénynek az értéke a brán baloldalán a kozmológiai evolúció végén csupán alig tér el az ő kezdeti értékétől, amit $\hat{m}_L(0) = 0.01$ esetén a 2.6. táblázat mutat. A brán kezdeti energiasűrűsége gyengén hatással van az \hat{m}_L végső értékére, a párolgás a kritikus energiasűrűség esetén a maximális.

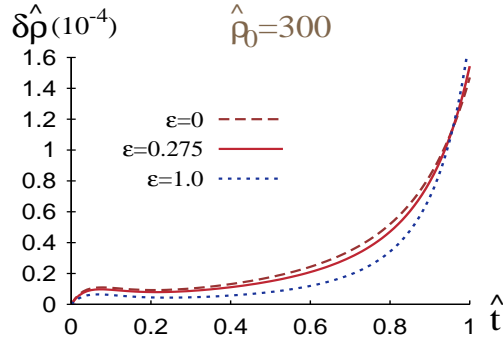
2.4.4. A részben áteresztő brán kozmológiai evolúciója

A továbbiakban azt vizsgálom meg, hogy az előző alfejezethez képest megendve egy új szabadsági fokot a transzmissziót (ε), a korábbi eredmények hogyan módosulnak.

A bránon áthaladó sugárzás nem járul hozzá sem a brán öngravitációjának növekedéséhez, sem a sugárzás által a bránra kifejtett nyomáshoz. A 2.10.-2.11. ábrák mutatják a sugárzás okozta perturbációt a skálafaktorban különböző transzmissziók esetén. Az ábra sorozat mutatja, hogy növekvő transzmisszió esetén a közel kritikus viselkedés romlik. Az ε kis értékeire a kritikus kezdeti brán energiasűrűség csökken növekvő transzmisszió esetén. A kritikus görbe szinuszos jellege annál dominánsabb, minél nagyobb a transzmisszió (2.10a-2.10b ábrák). A transzmisszió legmagasabb értéke, amelyre kritikus viselkedés tapasztalható: körülbelül 0.275 (2.10b ábra). Nagyobb transzmissziók esetén (2.11 ábra) nincs olyan kezdeti brán energiasűrűség, amelyre a skálafaktor értéke nagyobb lenne párolgó fekete lyuk esetén, mint Hawking



2.11. ábra. Magas transzmissziók esetén nincs kritikus viselkedés. Ezért $\delta\hat{a}$ evolúcióját csak a szélsőséges esetekben ábrázoltam [$\hat{\rho}_0=0$ (folytonos görbe) és $\hat{\rho}_0=2000$ (szaggatott görbe)]. Bármilyen kezdeti brán energiasűrűségre a sugárzás nettó járuléka gyorsabb rekollapszust eredményez. Az (a) ábrán $\varepsilon = 0.5$, míg a (b) ábrán $\varepsilon = 1$.



2.12. ábra. A Hawking sugárzásnak a brán energiasűrűség időfejlődésében okozott perturbációja. A kezdeti energiasűrűség $\hat{\rho}_0 = 300$, transzmissziók $\varepsilon = 0, 0.275$ és 1 .

sugárzás hiányában. Ez igaz a teljes kozmológiai evolúció során.

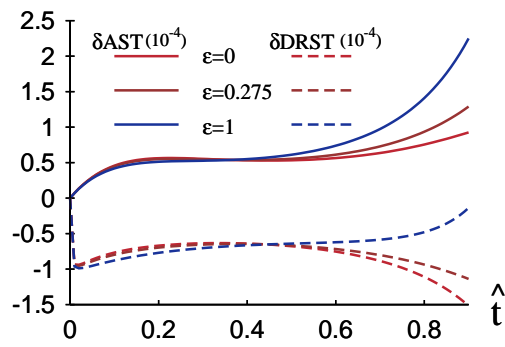
Teljes transzmisszió esetén a Hawking sugárzás nem gyorsítja a brán mozgását a magasabb dimenziós téridőben, de nem is növeli a brán öngravitációját. Ebben az esetben a Hawking sugárzás csak a Raychaudhuri egyenletben tűnik fel: $-(1 + \varepsilon)\hat{\psi}/\sqrt{6}$. Ez a tag, lévén negatív, lassítja a brán tágulásának ütemét, így a brán rekollapszusát segíti elő. Ennek következménye, hogy a skálafaktor értéke kisebb, mint a nem sugárzó esetben (2.11b ábra).

A Hawking sugárzás okozta perturbációt a brán energiasűrűségében a 2.12. ábra mutatja $\hat{\rho}_0 = 300$ és különböző transzmissziókra. Mivel a fekete lyuk párolgása nagyon lassú, ezért a transzmisszió változtatása alig hat a brán energiasűrűségének evolúciójára.

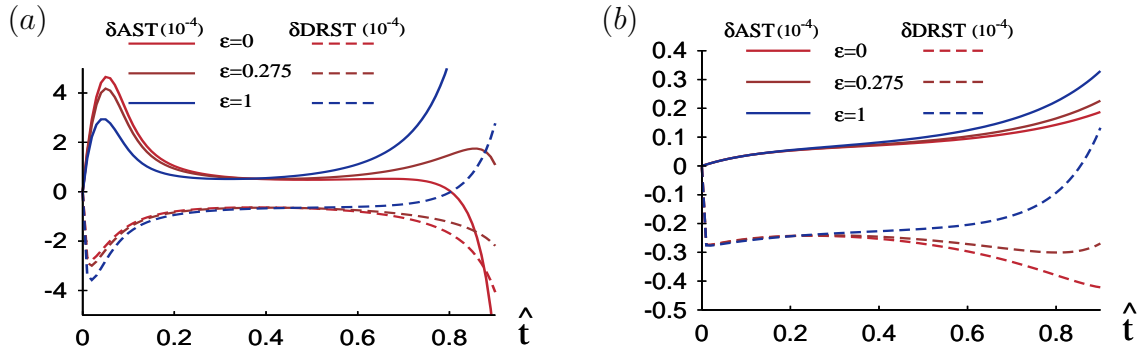
A Friedmann egyenlet sötét sugárzási és aszimmetria forrás tagjában a sugárzás miatti perturbációt a 2.13. ábra mutatja. Teljes abszorpció esetén, amikor a kritikus kezdeti brán energiasűrűség $\hat{\rho}_0^{crit} = 520$ az volt tapasztalható, hogy ez a két forrás tag nagyjából egyenlő, de ellentétes előjelűek. Növelve a transzmisszió értékét ez a viselkedés a késői kozmológiai időszakban megváltozik (2.13. ábra). Ez a transzmisszió által okozott viselkedés a késői fejlődési szakaszban független a brán kezdeti energiasűrűségének megválasztásától. A 2.14a ábra könnyű bránra vonatkozik, amíg 2.14b nehézre. Korai időszakban a transzmisszió csak könnyű bránok esetén fejt ki jelentős hatást (2.14a ábra). Könnyű bránok esetén a transzmisszió az evolúció korai szakaszában az aszimmetria tag abszolút nagyságát csökkenti, amíg a sötét sugárzásét növeli. Ez a tendencia fordított az evolúció késői szakaszában.

2.4.5. Konklúzió

VAdS₅ téridőbe aszimmetrikusan ágyazott zárt FLRW brán evolúcióját vizsgáltuk. Az aszimmetriát azáltal értük el, hogy csak a brán egyik oldalán lévő 5d régióba engedtünk meg fekete lyuk jelenlétét. Ez a fekete lyuk Hawking sugárzott. A Hawking sugárzást a brán részben elnyelte, részben áteresztette. A sugárzás visszavert komponensét nem vettük figyelembe, mert



2.13. ábra. A Hawking sugárzás okozta perturbáció a Friedmann egyenlet sötét sugárzási és aszimmetria forrás tagjában. A folytonos vonalak az aszimmetria tagban, míg a szaggatott vonalak a sötét sugárzási tagban bekövetkezett perturbációt mutatják $\varepsilon = 0, 0.275$ és 1 transzmissziókra. A kezdeti brán energiasűrűség $\hat{\rho}_0 = 520$ (a kritikus kezdeti energiasűrűség értéke átlátszatlan bránra).



2.14. ábra. Ugyanaz, mint a 2.13. ábrán (a) könnyű $\hat{\rho}_0 = 100$ és (b) nehéz bránokra $\hat{\rho}_0 = 2000$.

nincs olyan ismert kozmológiai állandót tartalmazó 5d téridő, amely kétkomponensű sugárzást tartalmaz. Korai univerzumot vizsgáltunk, ahol a brán sugárzás-dominálta.

Először megvizsgáltam párolgás mentes 5d fekete lyuk esetén a bránt jellemző mennyiségek időfejlődését. Ezután figyelembe vettem a Hawking sugárzást. Az alábbi eredményeket tapasztaltuk:

- két szembenálló kis hatás lép fel, amelynek köszönhetően a Hawking sugárzás csak perturbatívan változtatja meg a kozmológiai evolúciót a nem sugárzó esethez képest:
 - a bránon abszorbált sugárzás növeli a brán öngravitációját, így a bránt a gyorsabb rekollapszus felé hajtja;
 - a Hawking sugárzás azonban nyomást is fejt ki a bránra, amely bránnak a fekete lyuktól való távolodását segíti elő, ami gyorsuló kozmológiai táguláshoz vezethetne;
- $\varepsilon < 0.275$ -re létezik olyan kritikus kezdeti brán energiasűrűség ($\hat{\rho}_0^{crit}$), amikor a Hawking sugárzás miatt fellépő két egymással versenyző hatás közel kioltja egymást és minél nagyobb a transzmisszió, annál kisebb a kritikus brán energiasűrűség;
- ha a kezdeti energiasűrűség ($\hat{\rho}_0$) kisebb, mint $\hat{\rho}_0^{crit}$, akkor sugárzási nyomás a domináns, míg ha $\hat{\rho}_0 > \hat{\rho}_0^{crit}$, akkor a sugárzás okozta öngravitáció;
- a félig áteresztő bránok rekollapszusa gyorsabb magas transzmisszió esetén.

2.5. Az általánosított RS2 brán modellek luminozítás-vöröseltolódás relációja és kozmológiai tesztje Weyl folyadék jelenlétében

A fejezet a [204]-[205] cikkekben közölt eredményeket foglalja össze.

A következő brán modelleket vizsgáljuk (a sík Friedmann brán beágyazása minden esetben tükrörszimmetrikus):

- (a) Randall-Sundrum finom-hangolt bránok ($\Lambda = 0$). Ez az eredeti RS2 model;
- (b) modellek, melyek eleget tesznek $\Lambda = \kappa^2 \lambda / 2$ feltételnek, amely elemi függvényekkel megadható integrálokra vezet a luminozítás-vöröseltolódás reláció kifejezésében és
- (c) brán modellek nem eltűnő 4d kozmológiai állandó esetén, ahol a Weyl folyadékból és energia-impulzus tenzor kvadratikusan tagjából származó járulékok kicsik.

Ezekre a modellekre a 2.4. fejezetben analitikusan származtatom a luminozítás-vöröseltolódás relációt. A D. alfejezetben pedig megvizsgáljuk, hogy a rendelkezésre álló szupernóva adatok mennyire támogatják a felsorolt brán modelleket.

A (c) modellben figyelembe veszem a brán és a magasabb dimenziós téridő közötti energia kicserélődés lehetőségét. A bránt szimmetrikusan ágyazom be VAdS₅ téridőbe. A modell tehát egy-egy fekete lyukat tartalmaz a brán egyes oldalain. A 2.4. fejezethez képest egy másik fontos különbség, hogy itt a sugárzás a bránról ered, ezáltal növeli a fekete lyukak tömegfüggvényét. Sugárzás hiányában az egyes 5d régiók SAdS₅ téridők konstans, azonos m tömegparaméterrel. Ez történik az (a) és a (b) modellben. Amikor a brán sugárzik az m tömegparaméter nem marad a továbbiakban állandó. Ha a brán sugárzása olyan, amit a [206] cikk (3.2) egyenlete definiál, akkor $m \propto a^\alpha$, ahol $1 \leq \alpha \leq 4$. A struktúráképződés ekkor magyarázható sötét anyag helyett, a bránon az 5d téridő Weyl görbületéből származó Weyl folyadékkal ($\mathcal{E} = 6m/a^{4-\alpha}$) [206], [207]. Ez indokolja a modell további tesztelését. A (c) modellre a továbbiakban LWRS (Lambda-Weyl fluid-Randall-Sundrum; Lambda-Weyl folyadék-Randall-Sundrum) modellként hivatkozok (lásd 1.13. ábra).

RS2 brán modellek SNIa adatokkal való összevetését korábban azokban az esetekben végezték el, amikor bránt SAdS₅-be ágyazták, és az energia-impulzus tenzor kvadratikusan járulékként viszonylag nagy értékeket is megengedtek [208] és [209]. A Weyl görbületből származó járulékot [208]-ban elhanyagolták. A Weyl görbület figyelembe vételével az energia-impulzus tenzor kvadratikusan járulékból származó kozmológiai paraméter $\Omega_\lambda = 0.026$ értékére találtak legjobb illeszkedést [209]. Azonban a brán-feszültségre asztrofizikai és más kozmológiai becslésekből származtatott kényszerek Ω_λ -ra sok nagyságrenddel kisebb számot adnak.

2.5.1. A luminozítás-vöröseltolódás reláció RS2 brán-világokban

Az LWRS modell Friedmann egyenlete:

$$H^2 = \frac{\Lambda}{3} + \frac{\kappa^2 \rho}{3} \left(1 + \frac{\rho}{2\lambda} \right) + \frac{2m_0}{a^{4-\alpha}}. \quad (2.260)$$

Anyag dominálta időszakban a folytonossági egyenlet:

$$\dot{\rho} + 3H\rho = 0, \quad (2.261)$$

amely adja, hogy $\rho \propto a^{-3}$. A következő dimenziómentes mennyiségeket vezetem be:

$$\Omega_{tot} = \Omega_\Lambda + \Omega_\rho + \Omega_\lambda + \Omega_d, \quad (2.262)$$

$$\Omega_\rho = \frac{\kappa^2 \rho_0}{3H_0^2}, \quad \Omega_\lambda = \frac{\kappa^2 \rho_0^2}{6\lambda H_0^2}, \quad (2.263)$$

$$\Omega_d = \frac{2m_0}{a_0^{4-\alpha} H_0^2}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H_0^2}. \quad (2.264)$$

Az alsó 0 index a mennyiségek jelenlegi értékét jelölik. A Friedmann egyenlet az új jelölésekkel:

$$H^2 = H_0^2 \left[\Omega_\Lambda + \Omega_\rho \frac{a_0^3}{a^3} + \Omega_d \frac{a_0^{4-\alpha}}{a^{4-\alpha}} + \Omega_\lambda \frac{a_0^6}{a^6} \right], \quad (2.265)$$

amelynek a jelen időben vett értéke mutatja, hogy $\Omega_{tot} = 1$. A radiális koordináta (A.8)

$$\chi_{em} = \frac{1}{H_0} \int_{a_{em}}^{a_0} \frac{ada}{\left[\Omega_\Lambda a^6 + \Omega_\rho a_0^3 a^3 + \Omega_d a_0^{4-\alpha} a^{\alpha+2} + \Omega_\lambda a_0^6 \right]^{1/2}}. \quad (2.266)$$

Ez egy bonyolult integrál, amit a legtöbb esetben nem lehet analitikusan megadni. A következőkben megvizsgálunk különböző eseteket, amikor a fenti integrál analitikusan kezelhető.

Randall-Sundrum finom-hangolt bránok

Az eredeti Randall-Sundrum modellben a $\tilde{\Lambda}$ 5d kozmológiai állandó finom hangolt a brán-feszültséghez úgy, hogy a brán kozmológiai állandó eltűnik. Az egyszerűség kedvéért ebben az alfejezetben felteszem $\alpha = 0$ -át. Amiatt, hogy a kozmológiai állandó eltűnik a bránon $\Omega_\Lambda = 0$ a (2.266) nevezőjében lévő gyök jel alatti hatod fokú polinom harmadfokúra egyszerűsödik. A polinom gyökhelyei analitikusan megtalálhatók. Ebben az esetben a luminozítás-vöröseltolódás reláció elliptikus függvényekkel lesz megadható, amit a soron következő alfejezetben tárgyalok. Ezt követően vizsgálom az $\Omega_d \rightarrow 0$ (amikor az 5d régiók AdS_5 téridők) és a késői univerzum határesetet, amikor $\rho/\lambda \rightarrow 0$. További határátmenettel $\Omega_\lambda \rightarrow 0$ -ra kapható az általános relativitáselméletbeli Einstein-deSitter eset.

Schwarzschild-AdS 5d régiók Brán kozmológiai állandó hiányában a radiális koordináta (2.266) kifejezésében szereplő nevező gyökhelyei:

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{2\Omega_d a_0}{3\Omega_\rho} \left(1 + 2 \cosh \frac{\Psi}{3} \right), \\ \beta &= \frac{\Omega_d a_0}{3\Omega_\rho} \left(-1 + \cosh \frac{\Psi}{3} + i\sqrt{3} \sinh \frac{\Psi}{3} \right), \end{aligned} \quad (2.267)$$

és a β^* komplex konjugált. A Ψ segédmenység kifejezése

$$\cosh \Psi = 1 + \frac{27\Omega_\lambda \Omega_\rho^2}{2\Omega_d^3}. \quad (2.268)$$

A gyökhelyek ismeretében felhasználva a [210]-ben található (239.07) és (341.53) formulákat az integrálás végrehajtható. Figyelembe véve a (A.5), (A.9) és (A.11) egyenleteket, hosszadalmas, de egyenes számolás adja:

$$\begin{aligned} d_L^{\lambda d} &= \frac{(1+z)\Omega_d^{1/2}}{H_0\Omega_\rho} \left\{ (B_1 + B_2) [F(\varphi_0, \varepsilon) - F(\varphi_{em}, \varepsilon)] \right. \\ &\quad + 2B_2 \left[E(\varphi_{em}, \varepsilon) - E(\varphi_0, \varepsilon) \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\sin \varphi_0 \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi_0}}{1 + \cos \varphi_0} - \frac{\sin \varphi_{em} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi_{em}}}{1 + \cos \varphi_{em}} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.269)$$

ahol

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{-3^{1/4} (1 + 2 \cosh \frac{\Psi}{3})}{3 (4 \cosh^2 \frac{\Psi}{3} - 1)^{1/4}}, \\ B_2 &= \left(\frac{4 \cosh^2 \frac{\Psi}{3} - 1}{3} \right)^{1/4}, \end{aligned} \quad (2.270)$$

és

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3} \cosh \frac{\Psi}{3}}{2 \sqrt{4 \cosh^2 \frac{\Psi}{3} - 1}}, \\ \varphi &= \arccos \left\{ \frac{(1+z) \Omega_d \left[\sqrt{12 \cosh^2 \frac{\Psi}{3} - 3} - 1 - 2 \cosh \frac{\Psi}{3} \right] - 3 \Omega_\rho}{(1+z) \Omega_d \left[\sqrt{12 \cosh^2 \frac{\Psi}{3} - 3} + 1 + 2 \cosh \frac{\Psi}{3} \right] + 3 \Omega_\rho} \right\}, \end{aligned} \quad (2.271)$$

illetve $F(\varphi, \varepsilon)$ és $E(\varphi, \varepsilon)$ az első és másodfajú elliptikus integrálok (φ változóval, ε argumentummal). Itt φ a $0.. \pi/2$ tartományon fut. Az elliptikus integrálok φ más értékeire megkaphatók az alábbi addíciós szabályokat alkalmazva:

$$\begin{aligned} F(m\pi \pm \varphi, \varepsilon) &= 2mK \pm F(\varphi, \varepsilon), \\ E(m\pi \pm \varphi, \varepsilon) &= 2mE \pm E(\varphi, \varepsilon), \end{aligned} \quad (2.272)$$

ahol K és E a komplett első és másodfajú elliptikus integrálok. A (2.268), és (2.269)-(2.271) egyenletek adják meg a luminozítás távolság-vöröseltolódás reláció analitikus kifejezését Randall-Sundrum finom-hangolt FLRW bránokra. Bennük szerepelnek a jól ismert első és másodfajú elliptikus integrálok, illetve az Ω_ρ , Ω_λ , Ω_d kozmológiai paraméterek.

AdS 5 határeset ($\Omega_d \rightarrow 0$) A Ψ segédmenyiség (2.268) kifejezése csak $\Omega_d \neq 0$ érték mellett érvényes, és $\Omega_d \ll 1$ -re:

$$\cosh \Psi \approx \frac{27 \Omega_\lambda \Omega_\rho^2}{2 \Omega_d^3} \gg 1. \quad (2.273)$$

De

$$\cosh \Psi = \cosh \frac{\Psi}{3} \left(4 \cosh^2 \frac{\Psi}{3} - 3 \right) \approx 4 \cosh^3 \frac{\Psi}{3}, \quad (2.274)$$

ahol $\cosh(\Psi/3) \gg 1$, ezért

$$\cosh \frac{\Psi}{3} \approx \pm \sinh \frac{\Psi}{3} \approx \frac{3 \Omega_\lambda^{1/3} \Omega_\rho^{2/3}}{2 \Omega_d}. \quad (2.275)$$

Felhasználva (2.275) kifejezést a luminozítás távolság-vöröseltolódás reláció nagyon hasonló (2.269) egyenlethez, de benne a függvények más együtthatókkal jelennek meg:

$$\begin{aligned} d_L^\lambda &= \frac{2^{4/3} (1+z) \Omega_\lambda^{1/6}}{H_0 \Omega_\rho^{2/3}} \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) [F(\varphi_0, \varepsilon) - F(\varphi_{em}, \varepsilon)] \right. \\ &\quad + E(\varphi_{em}, \varepsilon) - E(\varphi_0, \varepsilon) \\ &\quad \left. + \frac{\sin \varphi_0 \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi_0}}{1 + \cos \varphi_0} - \frac{\sin \varphi_{em} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi_{em}}}{1 + \cos \varphi_{em}} \right\}, \end{aligned} \quad (2.276)$$

ahol

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}, \\ \varphi &= \arccos \frac{(\sqrt{3}-1) \Omega_\lambda^{1/3} (1+z) - \Omega_\rho^{1/3}}{(\sqrt{3}+1) \Omega_\lambda^{1/3} (1+z) + \Omega_\rho^{1/3}}.\end{aligned}\quad (2.277)$$

Késői univerzum limit Késői univerzumban $\rho \ll \lambda$, ennek következményeként $\Omega_\lambda = 0$ vehető. A sötét sugárzásból eredő járulékot megtartom. A (2.266) egyenlet számottevően egyszerűsödik és egyenes integrálás adja a luminozítás távolság-vöröseltolódás relációt:

$$d_L^d(z) = \frac{2\sqrt{1+z}}{H_0\Omega_\rho} \left(\sqrt{(\Omega_\rho + \Omega_d)(1+z)} - \sqrt{\Omega_\rho + \Omega_d(1+z)} \right). \quad (2.278)$$

Ez az eredmény szintén következik az általános (2.269) kifejezésből $\Omega_\lambda \rightarrow 0$ határesetben. Ekkor a (2.271) és (2.270) egyenletek adják

$$\varphi = \arccos \left\{ \frac{-\Omega_\rho}{2(1+z)\Omega_d + \Omega_\rho} \right\}, \quad (2.279)$$

$$\varepsilon^2 = 1, \quad (2.280)$$

$$B_2 = 1 = -B_1. \quad (2.281)$$

Megjegyezve $E(\varphi, 1) = \sin \varphi$, a (2.269) egyenletből kapható:

$$d_L^d = \frac{2(1+z)\Omega_d^{1/2}}{H_0\Omega_\rho} \left[\frac{\sin \varphi_0}{1 + \cos \varphi_0} - \frac{\sin \varphi_{em}}{1 + \cos \varphi_{em}} \right]. \quad (2.282)$$

Behelyettesítve $\varphi_{em} = \varphi(z)$ -t és $\varphi_0 = \varphi(0)$ -át kapható a (2.278) reláció.

Általános relativisztikus (Einstein-de Sitter) határeset A luminozítás távolság-vöröseltolódás reláció általános relativisztikus határesetre por dominálta és $k = 0 = \Lambda$ (Einstein-de Sitter modell) univerzumra megkapható a (2.266) kifejezés közvetlen integrálásával:

$$d_L^{GR}(z) = \frac{2\sqrt{1+z}}{H_0\Omega_\rho^{1/2}} \left[\sqrt{1+z} - 1 \right]. \quad (2.283)$$

Egyszerűen ellenőrizhető, hogy ez az eredmény megegyezik (2.278)-al, ha kikapcsoljuk a sötét sugárzást.

Az Einstein-de Sitter határeset szintén következménye (2.276)-nek $\Omega_\lambda \rightarrow 0$ -ra. Ahhoz hogy ezt lássuk, érdemes megjegyezni, amikor $\Omega_\lambda \rightarrow 0$, mind $\varphi \rightarrow \pi$ és $\varphi_0 \rightarrow \pi$. Ezért az elliptikus integrálok véges értékhez tartanak és értékeik különbsége a φ , illetve φ_0 helyen eltűnik. Ennélfogva a (2.276) egyenletben csak az utolsó két tag marad, melyek $\Omega_\lambda \rightarrow 0$ -ra 0/0 típusúak. Alkalmazva (2.277)-t az utolsó tagra:

$$\lim_{\Omega_\lambda \rightarrow 0} \Omega_\lambda^{1/6} \frac{\sin \varphi_{em} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi_{em}}}{1 + \cos \varphi_{em}} = \frac{\Omega_\rho^{1/6}}{3^{1/4} \sqrt{1+z}}, \quad (2.284)$$

és az utolsó előtti tagra, kapható:

$$\lim_{\Omega_\lambda \rightarrow 0} \Omega_\lambda^{1/6} \frac{\sin \varphi_0 \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi_0}}{1 + \cos \varphi_0} = \frac{\Omega_\rho^{1/6}}{3^{1/4}}. \quad (2.285)$$

A két tag összegéből, figyelembe véve (2.276)-ban lévő közös szorzójukat, visszanyerhető (2.283).

Bránok nem nulla kozmológiai állandóval

Ebben az alfejezetben olyan kozmológiai állandóval rendelkező Randall-Sundrum típusú brán-világok kerülnek vizsgálatra, melyekre a luminozítás távolság-vöröseltolódás relációnak analitikus kifejezése található.

Bránok elemi függvényekkel megadható luminozítás távolság-vöröseltolódás relációval

Elkerülve a Randall-Sundrum finom hangolást és megtartva a Λ brán kozmológiai állandót, (2.266) egyenlet nevezőjében lévő polinom egyszerűsíthető a dimeziómentes Ω -k bizonyos értékeire. Ha feltesszük

$$\Omega_d = 0 \quad \text{és} \quad 4\Omega_\lambda\Omega_\Lambda = \Omega_\rho^2, \quad (2.286)$$

a nevező gyök alatti kifejezése kvadratikussá lesz és az integrált elemi függvényekkel meg lehet adni:

$$d_L^{\Lambda=\kappa^2\lambda/2} = \frac{2^{1/3}(1+z)}{6H_0\Omega_\rho^{1/3}\Omega_\Lambda^{1/6}} \left\{ \ln \frac{(1-h+h^2)[1+h(1+z)]^2}{(1+h)^2[1-h(1+z)-h^2(1+z)^2]} + 2\sqrt{3} \arctan \frac{2-h}{\sqrt{3}h} - 2\sqrt{3} \arctan \frac{2(1+z)-h}{\sqrt{3}h} \right\}, \quad (2.287)$$

ahol $h = (\Omega_\rho/2\Omega_\Lambda)^{1/3}$.

A (2.286) egyenlet első feltétele az 5d régiókat AdS_5 téridőkre egyszerűsíti. Ezzel szemben a második feltétel sokkal komolyabb kényszert eredményez:

$$\kappa^2\lambda = 2\Lambda. \quad (2.288)$$

A (2.288), és (2.262) együtt Ω_λ -ra egy kvadratikussá kifejezést ad. Feltéve $\Omega_\rho = 0.27$, a másodfokú egyenlet megoldásai:

$$\Omega_\Lambda = 0.704, \quad \Omega_\lambda = 0.026, \quad (2.289)$$

amely a brán-feszültség⁴ $\lambda_1 = 38.375 \times 10^{-60} \text{TeV}^4$ értékének felel meg, és

$$\Omega_\Lambda = 0.026, \quad \Omega_\lambda = 0.704, \quad (2.290)$$

amely $\lambda_2 = 1.4173 \times 10^{-60} \text{TeV}^4$ -t ad.

A (2.290) megoldást a szupernóva adatok elvetik, amíg (2.289) nagyon közel van az Ω_Λ megfigyelt értékéhez [26]. Brán nézőpontból, azonban a (2.289) brán-feszültség túl kicsi ahhoz, hogy leírja a fizikai világunkat. Valójában az összes λ -ra származtatott alsó határ sokkal nagyobb, mint λ_2 (lásd 2.4.3. alfejezetet).

Az interpretációja a (2.289) egyenlet által adott modellnek a következő. A modellre vonatkozó (2.288) feltétel kis brán-feszültségre adja $\tilde{\Lambda} = 0$, így az 5d régiók sík téridőkké válnak. Mint ilyen, nincs hatással a dinamikára és az extra dimenzió feleslegessé válik. Tulajdonképp amivel találkozunk itt, az egy olyan általános relativitáselméleti modell, melyben a folyadék a^{-6} -al skálázódik.

$\Omega_d \ll 1$ és $\Omega_\lambda \ll 1$ értékekkel rendelkező bránok Ebben az alfejezetben felteszem, hogy mind Ω_λ és Ω_d kicsik, de Ω_Λ tetszőleges értékeit megengedem. Ezeket a feltevéseket az motivál-

⁴A brán feszültség értékei $c = 1 = \hbar$ egységekben értendők.

ja, hogy az univerzumunkat a Λ CDM modell képes leírni. Vezető rendig a kis paraméterekben (2.266) Taylor kifejtése:

$$d_L^{\Lambda\lambda d} = d_L^{\Lambda\text{CDM}} + \Omega_\lambda I_\lambda + \Omega_d I_d, \quad (2.291)$$

ahol

$$\begin{aligned} d_L^{\Lambda\text{CDM}} &= \frac{a_0 (1+z)}{H_0} \int_{a_{em}}^{a_0} \frac{da}{a^{1/2} [\Omega_\Lambda a^3 + \Omega_\rho a_0^3]^{1/2}}, \\ I_\lambda &= -\frac{a_0^7 (1+z)}{2H_0} \int_{a_{em}}^{a_0} \frac{da}{a^{7/2} [\Omega_\Lambda a^3 + \Omega_\rho a_0^3]^{3/2}}, \\ I_d^{(\alpha)} &= -\frac{a_0^{5-\alpha} (1+z)}{2H_0} \int_{a_{em}}^{a_0} \frac{a^{\alpha-3/2} da}{[\Omega_\Lambda a^3 + \Omega_\rho a_0^3]^{3/2}}. \end{aligned} \quad (2.292)$$

Az első kifejezés az általános relativisztikus luminositás távolság-vöröseltolódás reláció kozmológiai állandó jelenlétében (Λ CDM modell). A következő két integrál a brán-világ korrekciókat tartalmazza, melyek az Ω_λ és Ω_d kis együtthatókkal skálázódnak.

Az összes integrál nevezőjében fellépő $\Omega_\Lambda a^3 + \Omega_\rho a_0^3$ kifejezés gyökhelyei:

$$\begin{aligned} \alpha &= -a_0 \left(\frac{\Omega_\rho}{\Omega_\Lambda} \right)^{1/3}, \\ \beta &= \frac{a_0}{2} \left(\frac{\Omega_\rho}{\Omega_\Lambda} \right)^{1/3} (1 + i\sqrt{3}) \end{aligned} \quad (2.293)$$

és β^* . Ekkor $d_L^{\Lambda\text{CDM}}$ írható mint:

$$d_L^{\Lambda\text{CDM}} = \frac{a_0 (1+z)}{H_0 \Omega_\Lambda^{1/2}} \int_a^{a_0} \frac{da}{a^{1/2} (a - \alpha)^{1/2} (a - \beta)^{1/2} (a - \beta^*)^{1/2}}. \quad (2.294)$$

Alkalmazva [210]-ben található (260.00)-at az integrálás eredménye:

$$d_L^{\Lambda\text{CDM}}(z) = \frac{(1+z) [F(\varphi_0, \varepsilon) - F(\varphi, \varepsilon)]}{3^{1/4} H_0 \Omega_\rho^{1/3} \Omega_\Lambda^{1/6}}, \quad (2.295)$$

ahol az első fajú elliptikus integrál φ változója és ε argumentuma:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}, \\ \varphi &= \arccos \frac{(1 - \sqrt{3}) \Omega_\Lambda^{1/3} + (1+z) \Omega_\rho^{1/3}}{(1 + \sqrt{3}) \Omega_\Lambda^{1/3} + (1+z) \Omega_\rho^{1/3}}. \end{aligned} \quad (2.296)$$

(Itt ε^2 ugyanaz mint $\Omega_\Lambda = 0 = \Omega_d$ esetben, amíg φ ($0 \leq \varphi \leq \pi/2$) különböző. A φ más értékeire (2.272) alkalmazandó.)

Az Ω_λ -ban lineáris járulékot adó integrál kiértékelése viszonylag könnyű $t = a^{3/4}$ változó bevezetésével. Ezután parciális integrálással redukálva a nevező kitevőjét, és felhasználva a korábbi integrálás eredményét (2.272) kapható:

$$\begin{aligned} I_\lambda &= \frac{1+z}{15H_0\Omega_\rho^2} \left\{ \frac{8\Omega_\Lambda + 3\Omega_\rho}{(\Omega_\Lambda + \Omega_\rho)^{1/2}} - (1+z) \frac{8\Omega_\Lambda + 3\Omega_\rho (1+z)^3}{[\Omega_\Lambda + \Omega_\rho (1+z)^3]^{1/2}} \right\} \\ &\quad + \frac{8\Omega_\Lambda^{5/6} (1+z)}{15\sqrt[4]{3}H_0\Omega_\rho^{7/3}} [F(\varphi_0, \varepsilon) - F(\varphi, \varepsilon)], \end{aligned} \quad (2.297)$$

ahol φ -t, és ε -t a (2.296) egyenlet definiálja.

A (2.291) egyenlet utolsó tagjának kiintegrálása bonyolultabb. Mivel $\alpha = 1$ és 4-re az Ω_d forrás tag csupán járulékot ad Ω_ρ -hoz, illetve Ω_Λ -hoz, ezért az érdekes esetek az $\alpha = 0, 2, 3$. Az $\alpha = 2$ -re az integrál elemi függvényekkel megadható

$$I_d^{(2)} = \frac{1+z}{3\Omega_\rho\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_\rho(1+z)^3}} - \frac{1+z}{3\Omega_\rho\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_\rho}}. \quad (2.298)$$

Amikor $\alpha = 0$, vagy 3 az integrálás bonyolultabb. Először bevezetünk egy új változót $t = a^{3/2}$, és parciális integrálással redukálom a nevező kitevőjét. Ezt követően bevezetve az $x = \Omega_\Lambda^{1/3}t^{3/2}/\Omega_\rho^{1/3}a_0$ változót, és alkalmazva [210] (260.52) formuláját, kapom:

$$I_d^{(0)} = \frac{(1+z)}{3H_0\Omega_\rho^2} \left[\frac{4\Omega_\Lambda + 3\Omega_\rho}{\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_\rho}} - \frac{4\Omega_\Lambda + 3(1+z)^3\Omega_\rho}{(1+z)\sqrt{\Omega_\Lambda + (1+z)^3\Omega_\rho}} \right] - \frac{8(1+z)\Omega_\Lambda^{1/6}}{3H_0\Omega_\rho^{5/3}} I_d(\varphi, \varepsilon), \quad (2.299)$$

és

$$I_d^{(3)} = -\frac{(1+z)}{3H_0\Omega_\rho} \left[\frac{1}{\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_\rho}} - \frac{1}{(1+z)\sqrt{\Omega_\Lambda + (1+z)^3\Omega_\rho}} \right] + \frac{2(1+z)}{3H_0\Omega_\Lambda^{5/6}\Omega_\rho^{2/3}} I_d(\varphi, \varepsilon), \quad (2.300)$$

ahol

$$I_d(\varphi, \varepsilon) = \frac{(2+\sqrt{3})}{\sqrt[4]{3}(1+\sqrt{3})^3} \left\{ F(\varphi_0, \varepsilon) - F(\varphi, \varepsilon) - (3+\sqrt{3})[E(\varphi_0, \varepsilon) - E(\varphi, \varepsilon)] + (2+\sqrt{3})(3+\sqrt{3}) \times \left[\frac{\sin \varphi_0 \sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2 \varphi_0}}{1+(2+\sqrt{3})\cos \varphi_0} - \frac{\sin \varphi \sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2 \varphi}}{1+(2+\sqrt{3})\cos \varphi} \right] \right\}. \quad (2.301)$$

A (2.291), (2.295), (2.297)-(2.301) egyenletek adják az analitikus kifejezését az általános brán luminozitás távolság-vöröseltolódás relációnak kozmológiai állandó jelenlétében, első rendű pontosságig az Ω_Λ és Ω_d kis paraméterekben.

Eredmények

A fejezetben néhány brán modellre a luminozitás-vöröseltolódás reláció származtatása történt. A brán beágyazása minden esetben tükörszimmetrikus volt. A vizsgált brán modellek:

- Randall-Sundrum finom-hangolt bránok ($\Lambda = 0$);
- $\Lambda = \kappa^2\lambda/2$ feltételnek eleget tevő modellek. Ezeknél a luminozitás-vöröseltolódás reláció elemi függvényekkel megadható;
- a Weyl folyadékból, illetve az energia-impulzus tenzor kvadratikus tagjából származó járulékok kicsik és $\Lambda \neq 0$. A brán bizonyos ($\alpha \neq 0$) esetben sugárzik. Emiatt van egy energia kicserélődés a brán és az 5d régiókban található fekete lyukak között. Ez az LWRS modell.

2.5.2. A szupernóva adatokkal elvégzett tesztelés eredménye

Az előző alfejezetben tárgyalt modellek szupernóva adatokkal való összevetésének részletei a D. mellékletben található. Itt röviden összefoglalom a kapott eredményeket.

Az alábbi modelleket vetettük vizsgálat alá:

(A) Randall Sundrum finom-hangolt brán modellek, melyben jelentős sötét sugárzás van és a brán-feszültség értéke magas (az eredeti RS2 modell);

(B) Két olyan modell, melyben teljesül: $\Lambda = \kappa^2 \lambda / 2$ és nem tartalmaz sötét sugárzást;

(C) A kozmológiai állandóval rendelkező LWRS modell.

A történeti okok miatt érdekes (A) brán modelleket a megfigyelések nem támogatják. Még ha extrém magas sötét sugárzás is van jelen $\Omega_d = 0.73$ mintegy helyettesítve a kozmológiai állandót, e modellek jóslata távol esik a megfigyelésektől (D.1. ábrán az 5 görbe). A sötét sugárzás nem képes késői gyorsuló tágulást eredményezni, mert úgy skálázódik, mint a szokásos sugárzás. Ezért az RS2 brán modellekben szintén szükséges kozmológiai állandó (vagy más sötét energia), hogy a megfigyeléseket meg tudja magyarázni.

A (B) modell, melyben $\Omega_\Lambda = 0.026$ megint csak messze esik a megfigyelésektől (D.1. ábrán a 6 görbe). Az $\Omega_\Lambda = 0.704$ esetén a (B) modell bár jó egyezést mutatott a szupernóva adatokkal (D.1. ábrán a 4 görbe), a brán-feszültség túl alacsony értéke miatt más asztrofizikai és kozmológiai tesztekől származó kényszereket, melyek a λ minimum értékére vonatkoznak képtelen teljesíteni.

A (C) LWRS modellben a $-0.1 < \Omega_d < 0.1$ közötti tartományra származtattam le perturbatív kifejezést a luminozítás távolság-vöröseltolódás relációra. Ebben a tartományban $\alpha = 0$ mellett egy jelentős negatív energiasűrűséggel rendelkező sötét sugárzást a megfigyelések nem indokolják. A pozitív sötét sugárzás (ez a magasabb dimenzióban egy 5d fekete lyuknak felel meg mintsem csupasz szingularitásnak) egyezésben van az RS2 univerzum korai fejlődési szakaszával, ahol a brán sugárzása fekete lyukat hoz létre a magasabb dimenziós téridőben. A bránnak egy a struktúráképződés alatti lehetséges sugárzása tovább növeli a fekete lyuk tömegét.

Az $\alpha = 0$ és $\Omega_d \in (-0.03, 0.07)$ paraméterekkel rendelkező LWRS brán-világ modell kitűnő egyezést mutat a szupernóva adatokkal (D.3. ábra). A modell az $\Omega_d = 0.040$, $\Omega_\rho = 0.225$, $\Omega_\Lambda = 0.735$ paraméterek esetén adta a legjobb illeszkedést. Ezek a kozmológiai paraméterek tökéletes egyezésben vannak a WMAP 3-év adatai által preferált $\Omega_\rho h^2 = 0.127^{+0.007}_{-0.013}$ és $h = 0.73^{+0.03}_{-0.03}$, melyekből $\Omega_\rho = 0.238^{+0.035}_{-0.041}$ [211]. Az LWRS modell vizsgálatából nyert Ω_ρ érték körülbelül a WMAP 3-év adatai által meghatározott tartomány közepén helyezkedik el. Az $\Omega_d = 0.04$ preferált érték kompatibilis az univerzum ismert történetével, ha a brán egy ideig sugárzást bocsájt ki a magasabb dimenziós téridőbe. Egy ilyen mechanizmus a $z = 24$ és $z = 3$ között 10^3 faktossal képes növelni a sötét sugárzás energiasűrűségét az LWRS modellben a nem sugárzó esethez képest.

Az $\alpha = 1$ ($\alpha = 4$) paraméterű LWRS modellek megegyeznek a Λ CDM modellel, különbség csupán annyi, hogy a sötét anyag (a kozmológiai állandó) valamilyen hányada geometriai eredetű.

Az LWRS modellek az $\alpha = 2$ és $\alpha = 3$ értékekre való összevetése a szupernóva megfigyelésekkel nem ad éles minimumot χ^2 -re (D.4 és D.5 ábrák). A minimum érték elnyúlik a paramétertartományon, és növekvő α -ra az $\Omega_\rho \approx 0.3$ egyre kitüntetettebbé válik. Azonban az Ω_d és ennek megfelelően az Ω_Λ egyre szélesebb tartományban mutat jó illeszkedést.

A jelenleg rendelkezésre álló szupernóva adatok nem elegendőek ahhoz, hogy igazi különbségeket találjunk a különböző (a Λ CDM modell és az LWRS brán-világ) modellek esetén. Azonban a modellek jóslatai z növekedésével egyre jobban eltérnek egymástól, ezért a jövőbeli távoli ($z > 2$) szupernóvák felfedezéséből származó adatok élesebb különbségeket eredményezhetnek az elfogadható modellek között.

3. fejezet

Tachion, mint sötét energia jelölt

A fejezet a bevezető 1.3 fejezetében bemutatott kozmológiai modellre támaszkodó kutatásaimat mutatja be. Itt a sötét energia egy Tachion mezővel magyarázható. A 3.1 fejezet a [212] cikkben publikáltakra támaszkodik. A 3.2.1. alfejezet szelektált evolúciókra az energiasűrűség, a nyomás és a barotropikus index fejlődését tárgyalja kis kiegészítést nyújtva a [212] cikkben publikáltakhoz. A 3.2.2. alfejezetben pedig a modellnek a [212] cikkben túlmutató, Big Brake-et követő evolúciójának rövid diszkusszióját tartalmazza. Az új eredményeket a 3.1.1.-3.2.1. alfejezetek tartalmazzák.

Pontokba szedve az alábbiakat tárgyalom:

- Kezdeti feltételek meghatározása szupernóva megfigyelések tesztelésével (3.1.1. alfejezet);
- Jövő evolúció a de Sitter, vagy a Big Brake állapot eléréséig (3.1.2. alfejezet);
- A tachion mező energiasűrűségének, a nyomásának és a barotropikus indexének evolúciója, a tágulás gyorsulásának változása (3.2.1. alfejezet);
- Evolúció a Big Brake-től a Big Crunch végállapotig (3.2.2. alfejezet).

3.1. Tesztelés szupernóva adatokkal és a Big Brake

3.1.1. A tachion kozmológiai modell Ia típusú szupernóva megfigyelési adatokkal való tesztelése

Ebben az alfejezetben bemutatom, hogy az (1.24), (1.26) és $s = \dot{T}$ egyenletekkel leírható tachion kozmológiai modell [melyekben ρ és p kifejezését (1.22) és (1.23) adja, a potenciált pedig (1.34) definiálja], milyen $z = 0$ -ban rögzített kezdeti feltételek esetén illeszkedik jól a [213] cikkben publikált szupernóva adatokkal.

A szubluminális tartományban negatív a mező nyomása, amely szükséges (de nem elégséges) feltétel az erős energia-feltétel sértéséhez. Ezért feltettük, hogy a mező jelenleg ebben a tartományban van. Numerikus analízis céljából a releváns változókat átskálázva az alábbi dimenziótlan mennyiségeket vezetem be:

$$\hat{H} = \frac{H}{H_0}, \quad \hat{V} = \frac{V}{H_0^2}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{H_0^2}, \quad \hat{T} = H_0 T, \quad (3.1)$$

ahol H_0 a Hubble paraméter jelenlegi értéke $H_0 = H(z = 0)$. Továbbá a T változó helyett alkalmasabb az

$$y = \cos\left(\frac{3}{2}\sqrt{\Omega_\Lambda(1+w)}\hat{T}\right) \quad (3.2)$$

új változót bevezetni, és az idő szerinti deriválásról z szerintire áttérni:

$$\frac{d}{dt} = -H(1+z) \frac{d}{dz} . \quad (3.3)$$

Az (1.24), $s = \dot{T}$ és (1.26) egyenletrendszer a z függő új \hat{H} , s , y változóiban:

$$\hat{H}^2 = \frac{\hat{V}}{(1-s^2)^{1/2}} , \quad (3.4)$$

$$s = \frac{2(1+z)\hat{H}}{3\sqrt{\Omega_\Lambda(1+w)}(1-y^2)} \frac{dy}{dz} , \quad (3.5)$$

$$(1+z)\hat{H} \frac{ds}{dz} = 3\sqrt{\hat{V}}(1-s^2)^{3/4}s + (1-s^2) \frac{\hat{V}_{,\hat{T}}}{\hat{V}} , \quad (3.6)$$

ahol \hat{V} -t és $\hat{V}_{,\hat{T}}$ -t az alábbi kifejezések adják:

$$\hat{V} = \frac{\Omega_\Lambda [1 - (1+w)y^2]^{1/2}}{1-y^2} , \quad (3.7)$$

$$\hat{V}_{,\hat{T}} = \frac{3\Omega_\Lambda \sqrt{\Omega_\Lambda(1+w)}y[w-1+(1+w)y^2]}{2(1-y^2)^{3/2}[1-(1+w)y^2]^{1/2}} . \quad (3.8)$$

(megjegyzés: A (3.6) egyenlet csak $\hat{H} > 0$ esetén érvényes. Ennek teljesülését a numerikus fejlesztés során ellenőriztem.)

Mivel $\hat{H}^2(0) = 1$, az s és y jelenlegi értékeire az

$$s(0) = \pm \sqrt{1 - \frac{\Omega_\Lambda^2 [1 - (1+w)y(0)^2]}{[1 - y^2(0)]^2}}$$

kényszer adódik.

A luminozítás távolság meghatározására (A.11) egyenlet helyett a numerikus vizsgálatban alkalmasabb

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\hat{d}_L}{1+z} \right) = \frac{1}{\hat{H}} \quad (3.9)$$

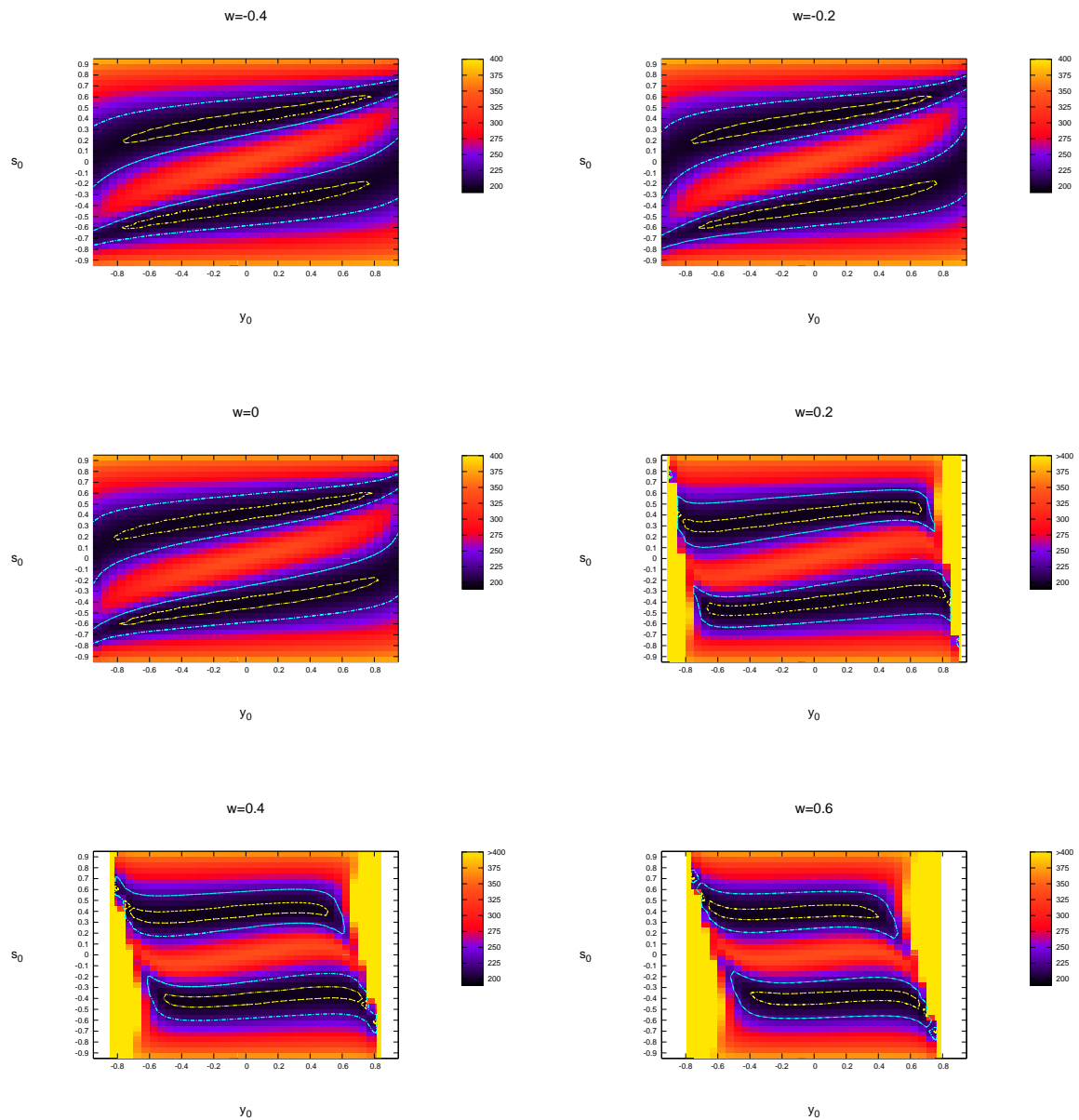
differentiál egyenletet használom, ahol a dimenziómentes \hat{d}_L -t a $\hat{d}_L = H_0 d_L$ kifejezéssel definiáltam.

A szupernóva adatokkal való teszt elvégzéséhez [214]-at követve bevezetem az $5 \log_{10} \hat{d}_L + M$ távolság modulus típusú mennyiséget, ahol M egy konstans eltérés az adat és az elméleti kifejezés között. A modell tesztelése a

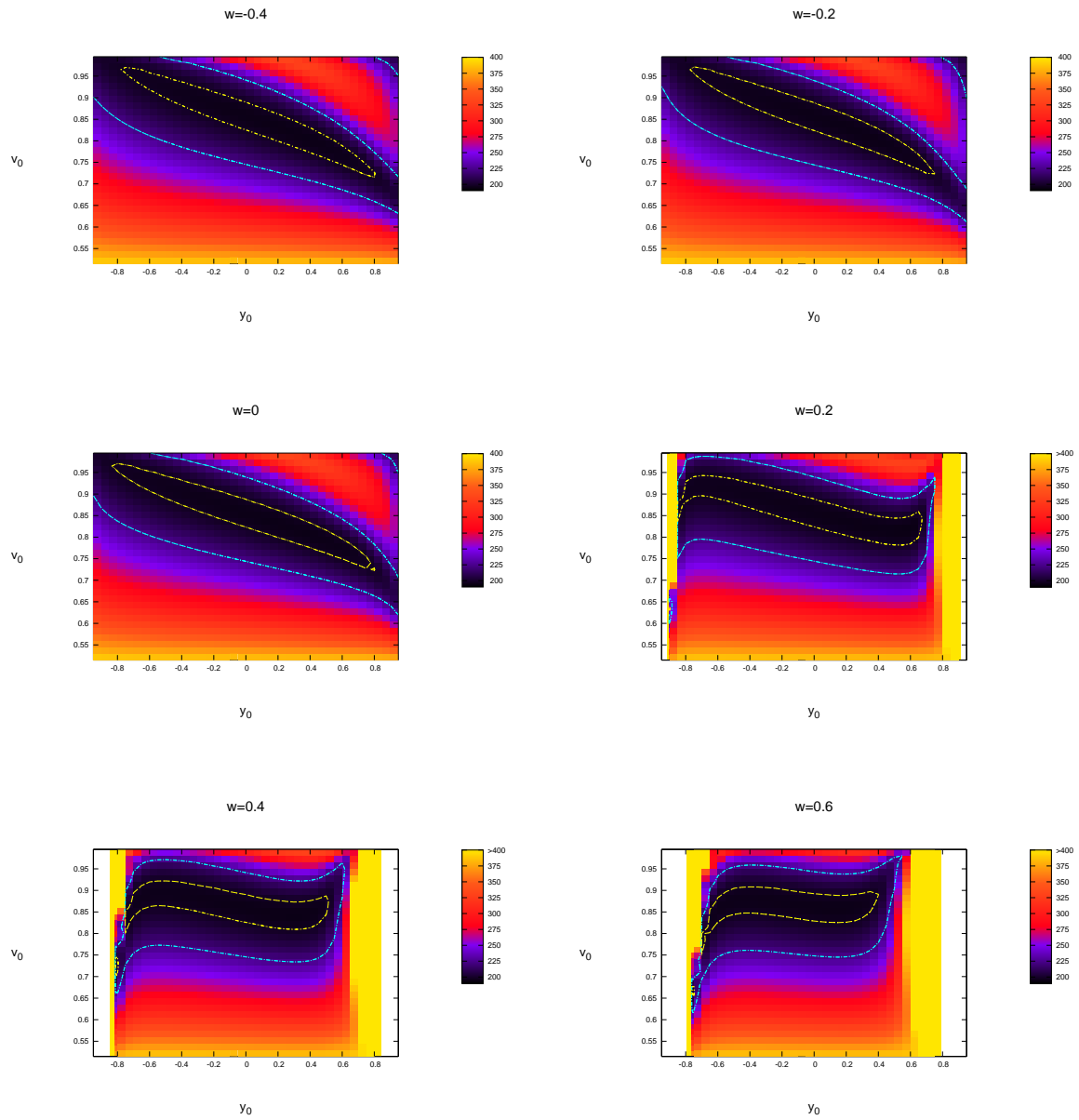
$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \left[5 \log_{10} \hat{d}_L^{\text{exp}}(z_i) - M - 5 \log_{10} \hat{d}_L(z_i) \right]^2 \quad (3.10)$$

mennyiség számolásán alapszik, ahol az összegzés végig fut a szupernóva adat halmazon és σ_i a mérési hiba az $5 \log_{10} \hat{d}_L^{\text{exp}}(z_i)$ mennyiség meghatározásában. A $\hat{d}_L(z)$ luminozítás távolság függ az $y_0 = y(0)$ és $s_0 = s(0)$ kezdeti feltételektől. A χ^2 értékének M szerinti minimalizálása azt eredményezi, hogy

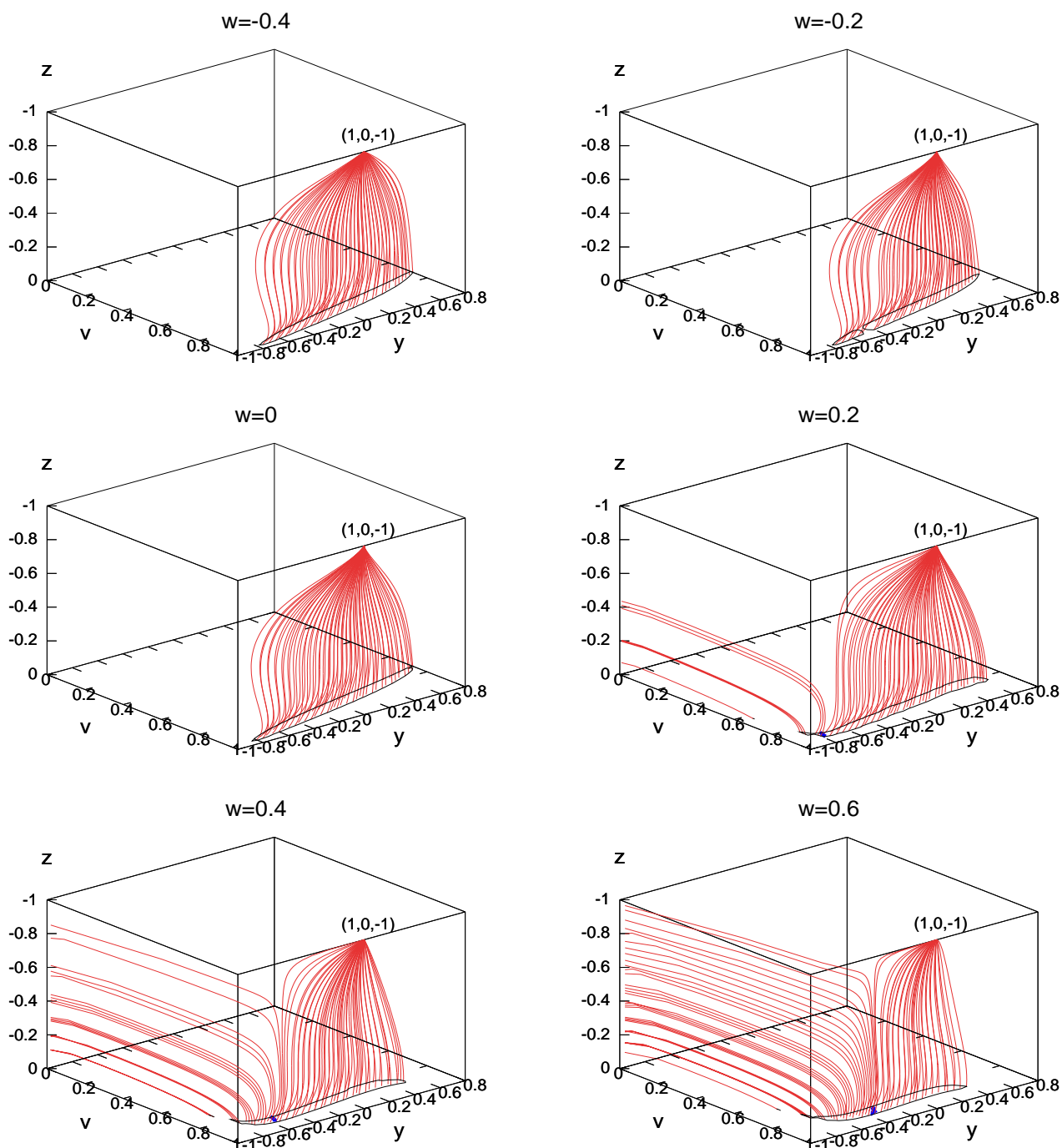
$$M = \frac{L}{D} , \quad (3.11)$$



3.1. ábra. A luminozitás távolság illeszkedése a szupernóva adatokkal; $w = -0.4$ (bal felső sarok), -0.2 (jobb felső sarok), 0 (középső bal oldali ábra), 0.2 (középső jobb oldali ábra), 0.4 (bal alsó sarok), 0.6 (jobb alsó sarok). A fehér területek olyan kezdeti feltétel párosokat jelölnek, ahol $|s_0| < 1$ nem teljesül. A kontúrok a 68.3% (1σ) és 95.4% (2σ) konfidencia szinteket mutatják. A függőleges csíkok mutatják a χ^2 szín kódját.



3.2. ábra. Ugyanaz, mint 3.1. ábra, de az $(y_0, v_0 = 1/(1 + s_0^2))$ síkban.



3.3. ábra. A szupernóva adatokkal 68.3% konfidencia szinten belül található univerzumok jövő evolúciója. Az 1σ kontúrok (fekete vonalak a $z = 0$ síkban) a 3.2. ábráról származnak (az (y_0, v_0) a $z = 0$ síkban található). Az ábrák és w értékeinek sora ugyanaz, mint 3.1., 3.2. ábrákon. A rövid és vastag kék vonal az 1σ paraméter tartományon belül azon kezdeti feltételeket szeparálja, amelyekből indulva a de Sitter korszakba, vagy a Big Brake-be jutunk. Egyre nagyobb w -kre a kezdeti paraméterek azon tartománya, amelyből induló trajektóriák az univerzum Big Brake szingularitásába futnak növekszik.

ahol

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \left[5 \log_{10} \hat{d}_L^{\text{exp}}(z_i) - 5 \log_{10} \hat{d}_L(z_i) \right], \quad (3.12)$$

$$D = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}. \quad (3.13)$$

A 3.1. ábrán a χ^2 értéket mutatom az $(y_0 = y(0), s_0 = s(0))$ kezdeti feltételek síkjában a $w = 0, \pm 0.2, \pm 0.4$ és 0.6 értékekre. A kontúrok a 68.3% (1σ) és 95.4% (2σ) konfidencia szinteknek felelnek meg.

A 3.1. táblázat mutatja a T változó (1.52)–(1.54) egyenletben megadott T_j -knek megfelelő y_j ($j = 1, 2, 3, 4$) értékeket a választott pozitív w -kra.

3.1. táblázat. A T_j -hez tartozó y_j értékek néhány pozitív w esetén.

k	0.2	0.4	0.6
$y_{1,2}$	± 0.816	± 0.655	± 0.500
$y_{3,4}$	± 0.913	± 0.845	± 0.791

3.2. táblázat. Azon tachion univerzumok tulajdonságai $w = 0.2$ -re, amelyek (a) illeszkedése Ia típusú szupernóva adatokkal 1σ konfidencia intervallumon belül található, és (b) Big Brake-be fejlődnek. Az (1) és (2) oszlopokban láthatók az 1σ -n belüli kezdeti értékek. A (3) és (4) oszlop mutatja az $s = 1$ -nél a z_* vöröseltolódást és a t_* időt. Az (5) és (6) oszlop adja a z_{BB} vöröseltolódást és t_{BB} értéket, amikor az univerzum eléri a Big Brake-et. A t_* és t_{BB} időpontok számolásánál $H_0 = 73$ km/s/Mpc-et vettem.

y_0	v_0	z_*	t_* (10^9 yrs)	z_{BB}	t_{BB} (10^9 yrs)
-0.90	0.635	-0.024	0.3	-0.068	1.0
-0.85	0.845	-0.158	2.4	-0.194	3.1
-0.85	0.860	-0.162	2.4	-0.198	3.1
-0.85	0.875	-0.166	2.5	-0.201	3.2
-0.80	0.890	-0.363	6.2	-0.390	6.9
-0.80	0.905	-0.384	6.7	-0.409	7.3
-0.80	0.920	-0.408	7.2	-0.432	7.9

Mivel az univerzum jelenleg gyorsulva tágul, a mező nyomása negatív, így $|s_0| < 1$. A (T, s) fázisdiagrammon a kezdeti pont belül kell legyen a $(T_3 < T < T_4, |s| < 1)$ téglalapon (lásd 1.12 ábrát). Ezért a modell az $y_0 < y_4$ és $y_0 > y_3$ tartományra korlátozódik. A fehér területek a 3.1. ábrán ilyen nem megengedett területek jelölnek.

A modell szimmetrikus az $y_0 \rightarrow -y_0$ és $s_0 \rightarrow -s_0$ együttes cseréjére. A paraméterter dupla lefedését elkerülhetjük bevezetve a

$$v_0 = \frac{1}{1 + s_0^2} \quad (3.14)$$

új változót. A 3.2. ábra mutatja a modell szupernóva adatokkal történt tesztelésének eredményét az (y_0, v_0) paramétersíkban.

3.1.2. Jövő kozmológiai evolúció

A szupernóva adatokkal való tesztre támaszkodva a tachion kozmológiai modell lehetséges jövő fejlődését állapítom meg ebben az alfejezetben. Ennek érdekében az 1σ (68.3%) konfidencia

3.3. táblázat. Ugyanaz, mint 3.2. táblázat $w = 0.4$ -re.

y_0	v_0	z_*	t_* ($10^9 yrs$)	z_{BB}	t_{BB} ($10^9 yrs$)
-0.80	0.710	-0.059	0.8	-0.106	1.6
-0.80	0.725	-0.059	0.8	-0.105	1.6
-0.80	0.740	-0.060	0.8	-0.105	1.6
-0.75	0.815	-0.144	2.1	-0.184	2.9
-0.75	0.830	-0.147	2.2	-0.187	3.0
-0.75	0.845	-0.150	2.2	-0.189	3.0
-0.70	0.845	-0.241	3.8	-0.276	4.6
-0.70	0.860	-0.248	4.0	-0.282	4.7
-0.70	0.875	-0.256	4.1	-0.290	4.9
-0.70	0.890	-0.264	4.2	-0.298	5.0
-0.65	0.860	-0.358	6.2	-0.387	7.0
-0.65	0.875	-0.372	6.5	-0.400	7.2
-0.65	0.890	-0.388	6.8	-0.415	7.6
-0.65	0.905	-0.406	7.2	-0.432	8.0
-0.60	0.875	-0.521	10	-0.542	11
-0.60	0.890	-0.551	11	-0.571	12
-0.60	0.905	-0.587	12	-0.605	13
-0.55	0.875	-0.756	19	-0.766	20
-0.55	0.890	-0.837	25	-0.845	26

intervallumon belül található (v_0, y_0) kezdeti értékekből indulva numerikusan jövő irányba időfejleszttem a modellt. A mozgásegyenleteket a $z = 0$ -ból a negatív z -k felé integrálom.

Számolásaimat a korábban választott w -k esetén végeztem el. Az eredményeket a 3.3. ábra mutatja. A 3d-s ábrák tengelyein a $v = (1 + s^2)^{-1}$, y és z értékek szerepelnek. A trajektóriák a $z = 0$ síkban található azon (v_0, y_0) paramétertartományokból indulnak, melyeket korábban a szupernóva adatokkal tesztelés során 1σ konfidencia intervallumon belül találtam. A de Sitter végállapot a $(v_{dS} = 1, y_{dS} = 0, z_{dS} = -1)$ pontnak felel meg az ábrákon, míg a Big Brake-et a görbék a $(v_{BB} = 0, -1 < y_{BB} < 0, -1 < z_{BB} < 0)$ síkon érik el.

A $w \leq 0$ esetén az összes görbe a de Sitter korszakba fejlődik. Azonban $w > 0$ -ra a (v_0, y_0) kezdeti feltételektől függően mind a de Sitter, mind a Big Brake elérhető. Egyre nagyobb pozitív w -k esetén a Big Brake szingularitás elérésének valószínűsége növekszik. Ezt mutatja az 1σ kék görbével szeparált altartományainak egymáshoz képesti relatív aránya a 3.3. ábrán. Az egyes altartományok a de Sitter és a Big Brake-be futó trajektóriák kezdeti értékeit választják el.

A 3.3. ábrán feltüntetett Big Brake-be tartó görbékre kiszámoltam a szingularitás $z = 0$ -tól számított elérésének idejét (t_{BB}) a $d(H_0 t)/dz = -\hat{H}^{-1}(1+z)^{-1}$ egyenleten keresztül. Az eredményeket a 3.2.-3.4. táblázatok tartalmazzák. A táblázat szintén tartalmazza azt a t_* időt, amikor a tachion mező nyomása negatívból pozitívba lép át.

3.2. Tachion mező viselkedése a távoli múltban, illetve a Big Brake után

3.2.1. Az energiasűrűség, a nyomás és a barotropikus index evolúciója

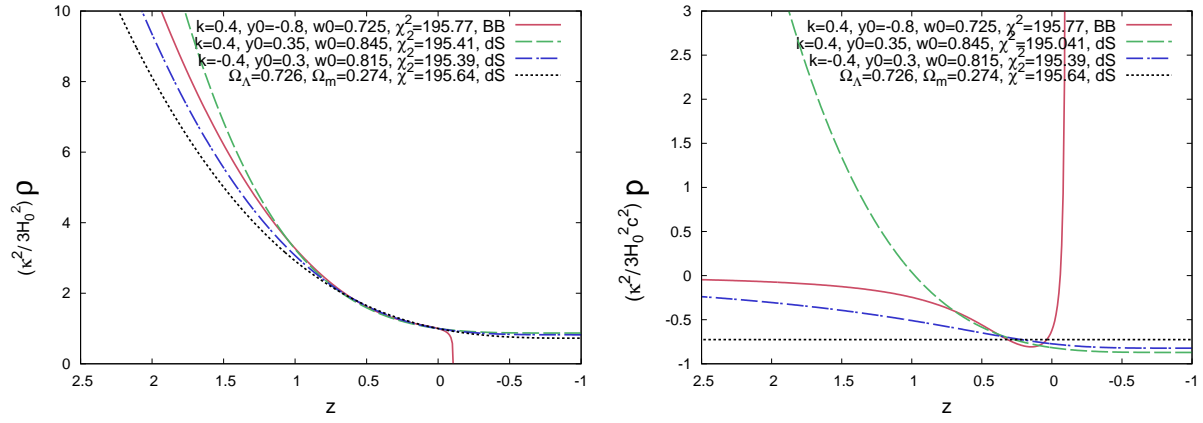
Szelektált evolúciókra az energiasűrűség és a nyomás vöröseltolódás függését ábrázoltam a 3.4. ábrán. Mind a múlt és a jövő evolúciót feltüntettem. Az energiasűrűség és a nyomás Hubble paraméter jelenlegi értékével való normált értéke (úgy, hogy dimenziótlan mennyiségeket kap-

3.4. táblázat. Ugyanaz, mint 3.2. táblázat $w = 0.6$ -ra.

y_0	v_0	z_*	t_* ($10^9 yrs$)	z_{BB}	t_{BB} ($10^9 yrs$)
-0.75	0.665	-0.039	0.5	-0.088	1.4
-0.70	0.755	-0.098	1.4	-0.145	2.3
-0.70	0.770	-0.100	1.5	-0.145	2.3
-0.70	0.785	-0.101	1.5	-0.146	2.3
-0.70	0.800	-0.102	1.5	-0.146	2.3
-0.65	0.815	-0.168	2.6	-0.209	3.4
-0.65	0.830	-0.171	2.6	-0.212	3.4
-0.65	0.845	-0.175	2.7	-0.215	3.5
-0.60	0.830	-0.240	3.9	-0.277	4.7
-0.60	0.845	-0.247	4.0	-0.283	4.8
-0.60	0.860	-0.254	4.1	-0.289	4.9
-0.60	0.875	-0.261	4.2	-0.296	4.0
-0.55	0.845	-0.325	5.5	-0.357	6.3
-0.55	0.860	-0.335	5.7	-0.366	6.5
-0.55	0.875	-0.347	5.9	-0.377	6.7
-0.55	0.890	-0.359	6.2	-0.389	7.0
-0.50	0.845	-0.411	7.5	-0.439	8.3
-0.50	0.860	-0.427	7.8	-0.453	8.6
-0.50	0.875	-0.444	8.2	-0.469	9.0
-0.50	0.890	-0.463	8.6	-0.488	9.4
-0.45	0.860	-0.533	10	-0.554	11
-0.45	0.875	-0.557	11	-0.577	12
-0.45	0.890	-0.584	12	-0.603	13
-0.45	0.905	-0.616	13	-0.633	14
-0.40	0.860	-0.658	15	-0.673	16
-0.40	0.875	-0.693	16	-0.707	17
-0.40	0.890	-0.733	18	-0.745	19
-0.40	0.905	-0.779	21	-0.789	22
-0.35	0.860	-0.814	23	-0.822	24
-0.35	0.875	-0.865	28	-0.872	29
-0.35	0.890	-0.927	36	-0.930	37
-0.30	0.845	-0.955	43	-0.957	44

jak) látható. Mindegyik ábrán négy görbe van. A fekete görbe a WMAP analízise által preferált Ω_Λ és Ω_ρ paraméterű Λ CDM modellt ábrázolja. A sötét anyag komponens $(1+z)^3$ -el megy. A másik három görbe a csupán tachion skalármezőt tartalmazó kozmológiai modelleket mutatja. Ezek különböznek w paraméterükben és a kezdeti adatokban. A kezdeti adatok a tachion mező, illetve annak változási sebessége jelenlegi értékeivel ekvivalensek. Mindhárom görbe a szupernóva teszt 1σ kontúrjának lokális minimumát keresztezi. Kék görbe esetén $w = -0.4$, amíg a másik két görbére $w = 0.4$. A zöld görbe a jövő de Sitter pontba fut, amíg a piros a Big Brake-be.

A 3.5. ábra a modellek barotropikus indexének $w_T = p/\rho c^2$ evolúcióját mutatja. Sötét anyag hozzáadása nélkül, a tachion mezőnek kell biztosítania a sötét anyag olyan hányadát, hogy az ábrán látható evolúciókban $(w_T)_{z=0} \in [-0.8, -0.6]$ legyen, hasonlóan a Λ CDM modellhez, ahol $w_\Lambda = -\Omega_\Lambda = -0.726$. Abban a modellben, ami a Big Brake felé tendáll, a nyomás megmarad negatívnak az egész kirajzolt fejlődés alatt, ezért $w_T < 0$. Így nincs fantom korszak $z < 1100$ -ra. A w_T barotropikus index összes evolúciója során a nullához konvergál.



3.4. ábra. A normált energiasűrűség és nyomás evolúciója látható négy kozmológiai modell esetén (lásd az ábrán látható jelmagyarázatot).

Ez Λ CDM-re, illetve $w = -0.4$ és a Big Brake-be tartó $w = 0.4$ -re már $z \approx 5$ körül bekövetkezik, amíg a de Sitterbe tartó $w = 0.4$ modell esetén csak $z \approx 200$ -ra. Alapvetően az összes tachion modell porként viselkedik a vöröseltolódás nagy értékeire.

Az univerzum tágulásának a gyorsulása (\ddot{a}) az (1.73) egyenlet szerint arányos a $-(\rho + 3p)$ kifejezéssel. Ahhoz, hogy a szupernóva adatokkal egy kozmológiai modell jól illeszkedjen $\rho + 3p < 0$ kell legyen jelenleg. A Big Brake-be tartó trajektóriák esetén ez a mennyiség valamikor szükségesen pozitívvá válik, hiszen $\ddot{a}_{BB} \rightarrow -\infty$. Az (1.73) egyenlet átírható a következő alakba

$$-\frac{2}{a_0 H_0^2} \ddot{a} = \frac{\kappa^2}{3H_0^2} \frac{\rho + 3p}{1+z}. \quad (3.15)$$

A 3.6. ábra mutatja $w = 0.4$ -re az 1σ tartományon belüli Big Brake-be tartó néhány trajektória esetén a tágulás gyorsulásának vöröseltolódástól való függését. A görbék között találunk olyanokat, amelyeknél a tágulás gyorsulásának csökkenése már a múltban bekövetkezett, de mindegyik esetén $z < 0.1$ -re. Ilyen típusú viselkedést a barotropikus index z függésére tett feltevésből [215]-ben jósoltak, ahol az SNIa adatokat, a megfigyelt galaxis eloszlást és a CMB hőmérsékleti fluktuációit használták referenciaként.

3.2.2. Túl a Big Brake-en

Ebben az alfejezetben a geodetikusok Big Brake-n keresztüli folytathatóságát tárgyalom. A Big Brake elkerülhetősége nem új eredmény. A téridők SS szingularitásokon keresztüli folytathatóságát [216]-ban általában megmutatták. Itt az általam használt modellre részletezem ezt az eredményt.

Geodetikus eltérülés

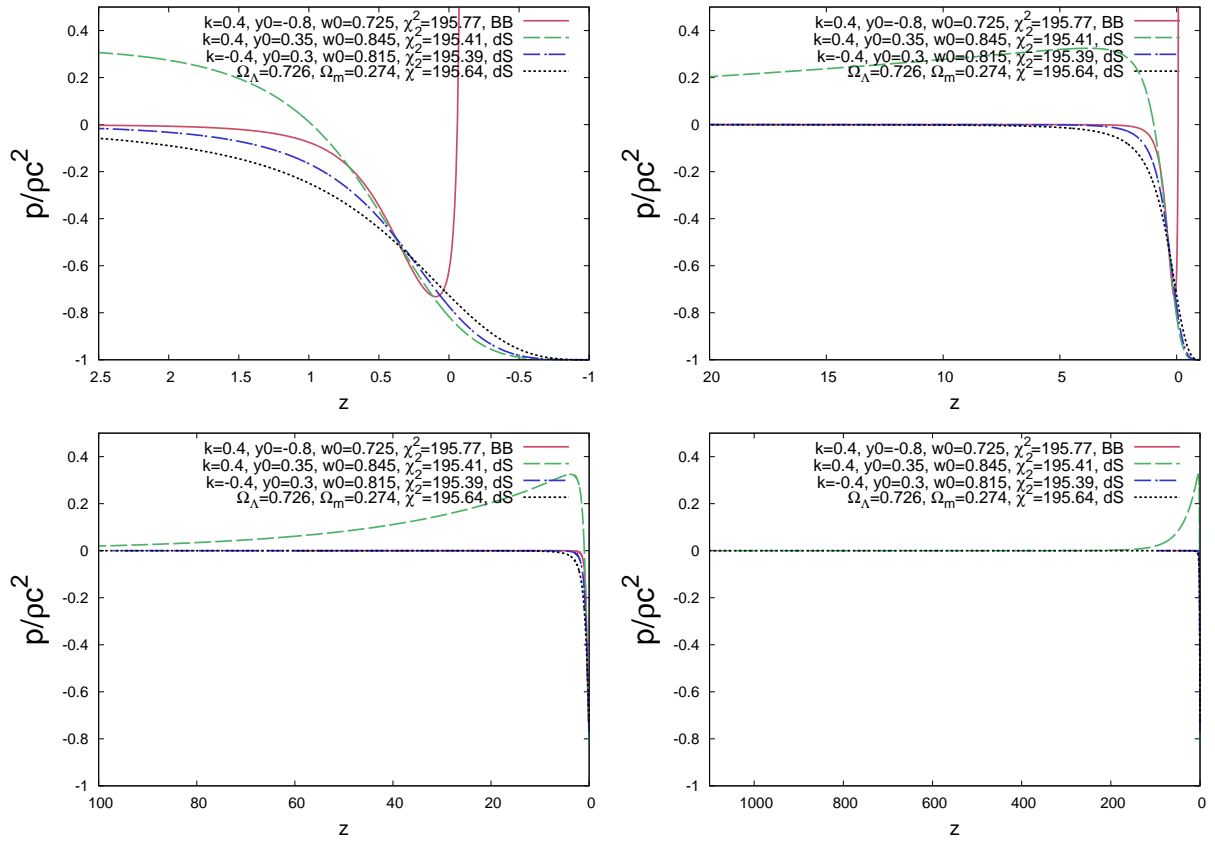
A geodetikus eltérülés egyenlete $u = \partial/\partial\tau$ mentén (ahol τ a görbe affin paramétere)

$$a^a = -R^a_{cbd} \eta^b u^c u^d. \quad (3.16)$$

Itt η^b a közeli geodetikusokat szeparáló deviációs vektor, amely eleget tesz $\eta^b u_b = 0$ egyenletnek. Az (1.1) metrika koordinátarendszerében

$$a^a = -R^a_{\tau b \tau} \eta^b \propto \ddot{a}, \quad (3.17)$$

ami divergál a Big Brake elérésekor ($\ddot{a}_{BB} \rightarrow -\infty$). Ezért a Big Brake elérésekor, az árapályerők, mint végtelen fékezőerő lép fel megállítva a geodetikusok szeparációjának további növe-



3.5. ábra. A barotropikus index evolúciója különböző tartományokban és modellekre.

kedését. Ez szintén látható a sebességből

$$v^a = u^b \nabla_b \eta^a \propto H, \quad (3.18)$$

amelyik eltűnik a Big Brake-nél.

A következő pillanatban a negatív gyorsulás a geodetikusak egymáshoz való közeledését okozza. Ezért bármi, ami eléri a Big Brake-et vissza fog pattanni; a tachion univerzum visszafelé fog fejlődni a görbék fázisdiagramján. Ez a visszafejlődés nem szimmetrikus, de látni fogjuk, hogy ugyanolyan típusú szingularitásba fog futni, mint amiből az univerzum született.

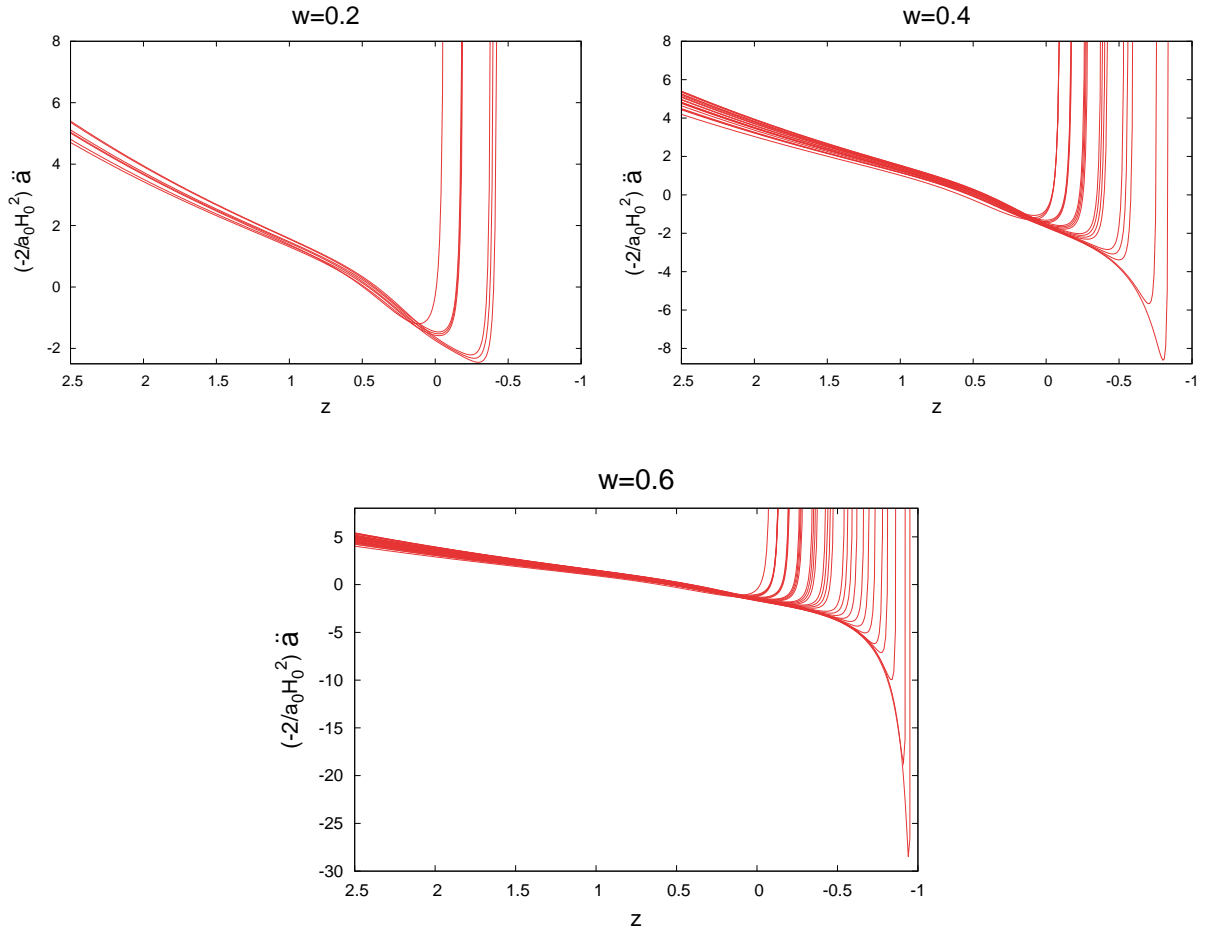
Big Brake-től a Big Crunch-ig

A Big Brake szingularitást a kozmológiai sugár egy véges a_{BB} értéknél, a t_{BB} időpontban érjük el. A Big Brake közelében érvényesek az (1.66)-(1.68) analitikus közelítő megoldások. Ezek a megoldások használhatók az egyes mennyiségek Big Brake-en keresztüli evolúciójára, így kezdeti feltételek előállítására a Big Brake szingularitás utáni numerikus fejlesztéshez. Hasonló egyenlet szükséges még az y változóra, ami (3.2), a $\dot{T} = s$, (1.66) egyenletek és $|\tau_{BB} - \tau| \ll 1$ felhasználásával kapható

$$y = y_{BB} + \sqrt{\Omega_\Lambda (1+w) (1-y_{BB}^2)} \left(\frac{9W(T_{BB})}{2} \right)^{1/3} (\tau_{BB} - \tau)^{1/3}. \quad (3.19)$$

Csak az s -re vonatkozó (1.66) kifejezés szinguláris a $t = t_{BB}$ -nél. A kozmológiai sugár időderiváltja (így a Hubble paraméter) előjelet vált a Big Brake-nél. Ez mutatja, hogy az expanziót kontrakció követi.

A 1.3 fejezetben láttuk, hogy a tachionikus modell trajektóriái a fázisdiagram jobb alsó csúkjában (lásd 1.12b ábra) csak az $(y = -1, s = -\sqrt{1+k}/k)$, $(y = -1, s = -\sqrt{1+k})$, vagy az $(y = y_*, s = -1)$, $-1 < y_* < y_4$ helyekről indulhatnak. Az $y = -1$ érték a fázisportré, amíg



3.6. ábra. Az univerzum gyorsulását meghatározó normált $\rho + 3p$ evolúciója a múltban és a jövőben a szupernóva adatokkal jól illeszkedő Big Brake-be tartó trajektóriákra.

y_4 a szublumínális középső tartomány jobb széleinek felelnek meg. A mező belső dinamikáját leíró (1.25) folytonossági egyenlet szimmetrikus az s és H előjelének együttes cseréjére. Ez azt mutatja, hogy a kontraháló trajektóriák csak az $(y = -1, s = \sqrt{1+k}/k)$, $(y = -1, s = \sqrt{1+k})$, vagy az $(y = y_*, s = 1)$, $-1 < y_* < y_4$ helyeken, tehát Big Crunch-al végződhetnek. A fázisdiagramról az is világos, hogy ezen trajektóriák közül csak az $(y = -1, s = \sqrt{1+k}/k)$ pontban végződő görbék mehetnek Big Brake-en keresztül, a többi még a Big Brake elérése előtt a Big Crunch-ba fut.

További célom numerikusan meghatározni, hogy a trajektóriák mennyi idő múlva érik el a Big Crunch-ot.

3.3. Konklúzió

A fejezetben először azt vizsgáltam meg, hogy tachion mező lehet-e jó sötét energia jelölt. Meghatároztam, hogy a modell mely paramétertartományban konzisztens az SNIa adatokkal. A skalármező érdekessége, hogy a fénysebességnél kisebb és nagyobb változási sebessége is megengedett. Az utóbbi esetben a mező nem sérti az erős energia-feltételt. A szublumínális tartományban a mező nyomása negatív, amely szükséges (de nem elégséges) feltétel az erős energia-feltétel sértéséhez. Ezért feltettük, hogy a mező jelenleg a szublumínális tartományban van. Az eredmények mutatták, hogy modell kiállja a szupernóva megfigyelésekkel való összevetést, ezért megfelelő jelölt a sötét anyag számára.

Ezután megvizsgáltam a jövő kozmológiai evolúciót. A szupernóva adatokkal legjobban illeszkedő kezdeti feltételekből indítottam a trajektóriákat. A trajektóriák között találtam olyan

alhalmazt, amelyek a Big Brake-nek nevezett új típusú szingularitásba futnak. A Big Brake szingularitás a mező szuperluminális viselkedésének tartományában van. Így a Big Brake-be tartó trajektóriák esetén a gyorsuló tágulás lassulóba megy át. Néhány esetben azt tapasztaltam, hogy a tágulás gyorsulásának csökkenése már a múltban bekövetkezett.

Amiatt, hogy a geodetikus egyenlet nem szinguláris a Big Brake elérésekor, a geodetikusok folytathatók. A Big Brake tehát nem lesz egy végső állapota az univerzumnak. Ehelyett a hirtelen fékezés következtében a részecskék visszapattannak, az univerzum összehúzódik, és végül a Big Crunch-nak nevezett szingularitásba fut. Célom numerikusan meghatározni a Big Crunch elérésének időskáláját.

A szupernóva adatokkal legjobban illeszkedő trajektóriák távoli múltba való visszafejlesztésekor a tachion mező porként, vagyis sötét anyagként viselkedett. Ezért a modell annak a lehetőségét hordozza magában, hogy esélyes legyen az egyesített sötét folyadék modellre (unified dark fluid model). A tachion modellnek tervezzük további általánosítását figyelembe véve, hogy barionikus anyag is jelen van, és megengedve a sötét anyag lehetőségét. Az általánosított modellt kollaborációban több kozmológiai tesztnek kívánjuk alávetni. A tesztek segítségével arra fogjuk keresni a választ, hogy a sötét anyag mekkora hányadát válthatja ki a tachion mező.

4. fejezet

Összefoglalás

A bevezető 1.1. fejezetében összefoglaltam a kozmológiai szempontból legfontosabb megfigyeléseket. A galaxisok feltérképezése és a kozmikus háttérsugárzás mutatja, hogy az Univerzum nagy skálán térbelileg homogén és izotróp. A legújabb megfigyelések szerint az általános relativitáselmélet akkor képes leírni az univerzum fejlődését, ha ismeretlen anyagok létezését feltételezzük. A hideg sötét anyag a struktúráképződés és a galaxis-halmazok megfigyelt dinamikájának megmagyarázásához szükséges. A sötét energia okozza az univerzum gyorsuló tágulását. A legegyszerűbb modell, amely sötét anyagot és kozmológiai állandót (legegyszerűbb sötét energia) feltételezve összhangban áll a megfigyelésekkel a Λ CDM. Az 1.2. fejezetben a sötét energia modelleket tekintettem át, amíg az 1.4. fejezetben a kozmológiai szingularitásokat soroltam fel.

Alternatív gravitációs modelleknél a sötét anyag és a sötét energia részben, vagy teljes egészében gravitációs eredetű. Néhány fontos példája a gravitációs dinamika megváltoztatásának a bevezető 1.5. fejezetében került bemutatásra. Az alternatív gravitációs modellek közül az RS2 modellt tanulmányoztam, melyet részletesebben az 1.6. fejezetben tárgyaltam.

A dolgozat egyik célja az RS2 brán-világokban az általános relativitáselmülethez képest megváltozott gravitációs dinamika vizsgálata volt (2. fejezet). A dolgozat másik feladata az [1]-ben talált új sötét energia jelölt kozmológiai modelljének tanulmányozása.

3+1+1 gravitációs dinamika

Kidolgoztam az RS2 modell leírására szolgáló 3+1+1 kovariáns formalizmust (2.1. fejezet), amely általánosít néhány korábban kifejlesztett módszert ([2], [3], [4]). Megadtam az általános egyenleteket a brán tetszőleges beágyazása mellett, mind a bránon, mind a külső 5d téridőben a kinematikai, gravito-elektro-mágneses és anyagi változók kifejezéseiben. Az egyenletek felírásakor semmilyen feltevést nem használtam az 5d téridő szimmetriáira, a brán beágyazására, vagy az anyagi forrásra. Megadtam az egyes kovariáns deriváltak kommutációs relációit és a mennyiségek transzformációit infinitezimális bázisváltásra. Ez utóbbi a perturbációszámításban fontos.

Származtattam a lokális 3d görbületi tenzor 3+1+1 változókkal való kifejezését (2.1.5 alfejezet). Örvénymentes esetben ez a 3d Riemann tenzor 3+1+1 felbontása. Ennek a megfelelő kontrakciójából (a 3d Riemann görbületi skalárból) vezettem le a kozmológia egyik alapegyenletét a Friedmann egyenletet.

Az 5d régiókban és a brán mentén érvényes általános 3+1+1 egyenletek, melyeket a 2.1.6. alfejezetben, illetve a B.3. mellékletben soroltam fel, akkor érvényesek, ha gravitációs törvényként elfogadjuk az 5d Einstein egyenletet. Így érvényesek DGP (Dvali-Gabadadze-Porrati) modellre is. A 2.1. fejezet a brán beágyazásra (a két 5d régió brán menti illesztésére) vonatkozó (2.74)-(2.77) egyenletekkel specifikálódik az RS2 modellre. Ezek a brán beágyazási relációk DGP modellre könnyen általánosíthatók.

A $3+1+1$ formalizmus általános egyenleteinek egy alcsoportjából származtathatók a gravitációs dinamikát bránon leíró egyenletek (2.1.7. alfejezet). Ezek korábban csak kozmológiai állandóval rendelkező vákuum $5d$ téridőbe tükörszimmetrikusan ágyazott bránra voltak ismertek [3]. Javítottam az irodalomban talált hibákat. A brán egyenletek nem alkotnak zárt rendszert. A dolgozat (2.125)-(2.127) egyenletei egy a korábban ismertnél általánosabb záródási feltételt adnak.

Megadtam az általánosított RS2 bránokra érvényes effektív Einstein egyenletek forrás tagjait $3+1+1$ kovariáns változókkal (2.1.7. alfejezet). Felírtam a térbelileg homogén és izotróp bránokra a kozmológia legfontosabb egyenleteit, a Friedmann, a Raychaudhuri és az energia mérleg egyenleteket (2.1.8. alfejezet). Ezeket korábban [163]-ban adták meg. Eredményüket más módszerrel visszanyertem. További alkalmazásként megadtam a $3+1+1$ formalizmus mennyiségeit egy anizotróp brán-világra [169].

A dolgozatban általánosításra került formalizmusok ([3] és [4]) nem voltak alkalmasak a kozmológiai perturbációk általános tárgyalására. A [4]-ben kifejlesztett formalizmus csak örvénymentes téridők vizsgálatára alkalmas. A perturbációkat leíró egyenletek [3]-ban nem alkotnak zárt rendszert. A kifejlesztett $3+1+1$ kovariáns formalizmus alkalmas a perturbációk általános vizsgálatára, és brán fekete lyuk megoldások származtatására.

Lokális forgás-szimmetrikus, stacionér, vákuum brán téridők

Speciális szimmetriák esetén a $3+1+1$ kovariáns formalizmust alkalmaztam új brán téridő származtatására (2.2. fejezet). A brán stacionér és lokálisan forgás szimmetrikus (LFSZ). A lokális forgás szimmetria minden pontban egyértelműen kijelöl egy térbeli irányt, ezért a brán téridőt tovább bontottam $2+1+1$ alakba. Vizsgálataimat az általános relativitáselméleti lokálisan forgás-szimmetrikus téridők három osztálya közül az I-es típusú örvényes téridőre korlátoztam. A Weyl folyadék anizotróp nyomás tagjára kirótt segéd-feltétel figyelembe vételével származtattam két másodrendű, nem lineáris differenciál egyenletből álló rendszert, aminek általános megoldása szolgáltatja a feltevésekkel konzisztens brán téridőket. Az egyenletek nem-linearitása miatt partikuláris megoldás keresésére szorítkoztam.

A talált téridő formálisan az általános relativitáselméleti elektromosan töltött Taub-NUT-(A)dS téridő-nek feleltethető meg. A Taub-NUT-(A)dS téridő egy kozmológiai vákuumba ágyazott elektromosan töltött, tömeges, NUT (Newman-Unti-Tamburino) töltéssel rendelkező fekete lyukat ír le. A NUT töltés egyik érdekes következménye, hogy a téridő egyes régióiban zárt időszerű görbék vannak. A brán megoldásban az elektromos töltés szerepét az $5d$ nem lokális gravitációs hatások eredményeképpen megjelenő árapály-töltés veszi át. Amíg az elektromos töltés a fekete lyuk gravitációs vonzását gyengíti, addig az árapály-töltés előjelétől függően erősítheti is azt. Az új téridő az árapály-töltésű Taub-NUT-(A)dS bránként interpretálható. Eltűnő NUT töltésre a [183]-ban talált gömbszimmetrikus brán megoldást adja.

$5d$ Birkhoff-tétel kiterjesztése

Ötdimenziós Birkhoff-tétel alatt azt az eredmény értik, hogy Friedmann bránt tartalmazó, az extra dimenzió mentén annak szimmetriáival rendelkező 4 -dimenziós hiperfelületekkel fóliázható, negatív kozmológiai állandóval rendelkező $5d$ téridők sztatikusak és az általánosított Schwarzschild - Anti-de Sitter osztályba tartoznak [6], [133]. A tételt sérti az $5d$ Gergely-Maartens (GM) téridő [7], amelyik nem tartozik ebbe az osztályba, de rendelkezik ugyanazon szimmetriákkal. Erre a téridőre [6] bizonyítása nem alkalmazható.

A GM megoldás néhány görbületi skalárjára [7]-ben megmutatták, hogy negatív $5d$ kozmológiai konstans esetén azok megegyeznek a megfelelő görbületi skalárokkal a negatív görbületi indexű, extrémális Schwarzschild - Anti-de Sitter ($SAdS_{5-}$) téridő degenerált horizontján. Ez mutatta a GM metrika és $SAdS_{5-}$ degenerált horizontja közötti szoros kapcsolat lehetőségét.

A 2.3. fejezetben bizonyítottam, hogy negatív 5d kozmológiai állandó esetén a GM metrika az 5d Birkhoff-tételben szereplő hiperbolikus 5d Schwarzschild-Anti-de Sitter téridő degenerált horizontjának környezetét írja le.

Pozitív 5d kozmológiai állandóra pedig azt találtam, hogy a GM téridő az 5d Schwarzschild-de Sitter degenerált horizontjának környezetét adja.

Általános relativitáselméletben hasonló kapcsolat a Bertotti-Robinson és az extrémális Reissner-Nordström téridők között ismert, amit a C. függelékben ismertettem.

Zárt Friedmann bránok evolúciója sugárzó 5d fekete lyuk jelenlétében

A 2.4. fejezetben megvizsgáltam hogyan hat a magasabb dimenziós fekete lyuk Hawking sugárzása a zárt brán univerzumok kozmológiai fejlődésére. Származtattam a 3+1+1 kovariáns formalizmus általános egyenleteiből az 5d téridőbe aszimmetrikusan beágyazott brán-világokat leíró egyenletrendszer abban az esetben, amikor csak az egyik 5d régió tartalmaz fekete lyukat.

Legáltalánosabb szituációban a brán az 5d fekete lyuk Hawking sugárzását részben elnyeli, visszaveri, illetve átereszt. Egy komponensű sugárzást geometriai optikai határesetben tekintve, az 5d régiók VAdS₅ régiók. A visszavert sugárzás esetét nem tanulmányoztam, mert nem ismert olyan kozmológiai állandót tartalmazó 5d téridő, amely kétkomponensű sugárzást tartalmaz. Korai univerzumot vizsgáltam, így a brán sugárzás-dominált.

Viszonyításképpen először numerikusan megvizsgáltam a párolgás mentes 5d fekete lyuk esetén a bránt jellemző mennyiségek időfejlődését. A sugárzás-dominált zárt univerzumok ($k = 1$ görbületi index és $\Lambda = 0$ brán kozmológiai konstans) hasonlóan, mint az általános relativitáselméletben összehúzódtak, végül Big Crunch típusú szingularitásban végződtek.

A Hawking sugárzás figyelembe vétele az alábbiakat okozta:

- a Hawking sugárzás csak perturbatíván változtatja meg a kozmológiai evolúciót a nem sugárzó esethez képest. Két szembenálló kis hatás lép fel:
 - a bránon elnyelt sugárzás növeli a brán öngravitációját, így a bránt a gyorsabb rekollapszus felé hajtja;
 - a Hawking sugárzás azonban nyomást is fejt ki a bránra, amely a bránnak a fekete lyuktól való távolodását segítve elő (kozmológiai tágulást gyorsító hatás);
- a transzmisszió 0.275-nél kisebb értékeire léteznek olyan kritikus kezdeti brán energiasűrűségek ($\hat{\rho}_0^{crit}$), amikor a Hawking sugárzás miatt fellépő két egymással versengő hatás közel kioltja egymást;
- minél nagyobb a transzmisszió, annál kisebb a kritikus brán energiasűrűség;
- ha a kezdeti energiasűrűség ($\hat{\rho}_0$) kisebb, mint $\hat{\rho}_0^{crit}$, akkor a sugárzási nyomás a domináns, míg ha $\hat{\rho}_0 > \hat{\rho}_0^{crit}$, akkor a sugárzás okozta öngravitáció;
- a félig áteresztő bránok rekollapszusa gyorsabb magas transzmisszió esetén.

Az általánosított RS2 brán modellek luminozítás-vöröseltolódás relációja és kozmológiai tesztje Weyl folyadék jelenlétében

Sík Friedmann brán szimmetrikus beágyazása mellett származtattam a luminozítás-vöröseltolódás relációt a következő esetekben (2.5.1. alfejezet):

- Randall-Sundrum finom-hangolt bránok (a Λ brán kozmológiai állandó zérus). Ez az eredeti RS2 modell. A luminozítás-vöröseltolódás reláció elliptikus integrálokra vezethető vissza;
- $\Lambda = \kappa^2 \lambda / 2$ (λ a brán-feszültség, κ^2 a gravitációs csatolási állandó) feltételnek eleget tevő modellek. Ezeknél a luminozítás-vöröseltolódás reláció elemi függvényekkel megadható;
- a Weyl folyadékból, illetve az energia-impulzus tenzor kvadratikusan tagjából származó járulékok kicsik és $\Lambda \neq 0$. A modell három kozmológiai paraméterrel rendelkezik: Ω_ρ (hideg sötét anyag), Ω_d (Weyl folyadék), Ω_Λ (brán kozmológiai konstans). Ezek eleget tesznek az $\Omega_\rho + \Omega_d + \Omega_\Lambda = 1$ feltételnek. Speciális Weyl járulék esetén a brán sugárzik. Emiatt a brán és az 5d régiókban található fekete lyukak között energia csere van (LWRS modell). A luminozítás-vöröseltolódás reláció elliptikus integrálokkal adható meg.

Az első két esetben az 5d régiók SAdS₅, míg az LWRS modellben VAdS₅ régiók. Az LWRS modellben a brán sugárzását az 5d fekete lyukak elnyelik, melyek tömegparaméterei ezért fokozatosan nőnek: $m \propto a^\alpha$, ahol $1 \leq \alpha \leq 4$, és a a skálafaktor. A modell érdekessége, hogy a struktúráképződés magyarázható sötét anyag helyett, a bránon az 5d téridő Weyl görbülete miatt megjelenő Weyl folyadékkal [206], [207].

A felsorolt modelleket összevetettük a Gold2006 szupernóva adatokkal (2.5.2. alfejezet). A Randall-Sundrum finom-hangolt bránokat a megfigyelések nem támogatják. A $\Lambda = \kappa^2 \lambda / 2$ feltételnek eleget tevő modell bár jó egyezést mutatott a szupernóva adatokkal, a brán-feszültség túl alacsony értéke miatt, más asztrofizikai és kozmológiai becslésekből származó kényszereket, melyek a λ minimum értékére vonatkoznak, képtelen teljesíteni.

Az $\alpha = 0$ paraméterű LWRS modelleknél olyan kozmológiai paraméterekkel rendelkezőt találtuk a szupernóva adatokhoz legjobban illeszkedőnek, ami tökéletes egyezésben van a WMAP 3-év adataiból kapottal. Az $\alpha = 1$ és $\alpha = 4$ paraméterekkel rendelkező LWRS modellek formálisan megegyeznek a Λ CDM-el, de itt a sötét anyag, illetve a sötét energia bizonyos része geometriai eredetű lehet. Az $\alpha = 2$ és $\alpha = 3$ értékek esetén az adatokkal való összevetés nem tüntet ki élesen egy kozmológiai paraméter párt. Összevetve a különböző eseteket azt találtuk, hogy növekvő α -ra az $\Omega_\rho \approx 0.3$ egyre kitüntetettebbé válik, viszont az Ω_d (vagy az Ω_Λ) egyre szélesebb tartományban mutat jó illeszkedést.

A tachion kozmológiai modell keretén belül végzett kutatásaim

A sötét energia magyarázatául szolgálható új anyagként egy tachion mező hatásainak vizsgálatára került sor a dolgozatban. Ez a mező a húrelméletekben is feltűnik [58]–[61], az értekezésben azonban az egy dimenziós relativisztikus mozgást végző részecskék természetes mezőelméleti általánosításaként vezettem be. A skalármező érdekessége, hogy a fénysebességnél kisebb és nagyobb változási sebessége is megengedett. Az utóbbi esetben a mező nem sérti az erős energia-feltételt. Ahhoz, hogy a szupernóva adatokkal egy kozmológiai modell jól illeszkedjen napjainkra gyorsuló tágulást kell létrehoznia. Ezért a mező jelenleg a szubluminális tartományban van.

A modell kompatibilitását az Ia típusú szupernóva adatokkal a 3.1. fejezetben vizsgáltam. Az eredmények azt mutatták, hogy a modell kiállja a szupernóva megfigyelésekkel való összevetést, ezért megfelelő sötét energia jelölt. Meghatároztam az SNIa adatokkal jól illeszkedő paramétertartományt (kezdeti feltételeket). A legjobban illeszkedő kezdeti feltételek esetén a trajektóriák egy alhalmazának jövő evolúciója a Big Brake-nek nevezett új típusú szingularitásba fut. Kiszámoltam a Big Brake elérésének időskáláját, ez az Univerzum jelenlegi korához mérhető.

A Big Brake-be tartó trajektóriák esetén a gyorsuló tágulás szükségszerűen lassulóba megy át, mivel a szingularitás a szubluminális tartományban helyezkedik el. Néhány esetben azt tapasztaltam, hogy ez az átmenet már a múltban bekövetkezhetett $z < 0.1$ -re.

A szupernóva adatokkal leginkább illeszkedő trajektóriák távoli múltba való visszafejlesztése azt mutatta, hogy a tachion mező porként, vagyis sötét anyagként viselkedik. Ezért elképzelhető, hogy a tachion mező egységes sötét folyadékot szolgáltat (unified dark fluid).

Amiatt, hogy a geodetikus egyenlet nem szinguláris a Big Brake elérésekor, a geodetikusok folytathatók. A Big Brake tehát nem lesz egy végső állapota az univerzumnak. Helyette a hirtelen fékezés következtében az Univerzum összehúzódik, és végül a Big Crunch-nak nevezett szingularitásba fut.

Summary

The most important observations from cosmological viewpoint were summarized in Section 1.1. Mapping of the galaxy and the cosmic microwave background show that the Universe is spatially homogeneous and isotropic on large scales. According to the newest observations, general relativity can describe the evolution of the Universe if we assume the existence of unconventional matter sources. Cold dark matter is necessary for the explanation of structure formation and the observed dynamics of galaxy clusters. Dark energy is causing the accelerated expansion of the Universe. The simplest model that agrees with the observations is Λ CDM including dark matter and a cosmological constant (the simplest form of the dark energy). I reviewed the dark energy models in Section 1.2, and the cosmological singularities in Section 1.4.

The observations may also be explained by modifying gravitational dynamics. In the alternative gravitational models, dark matter and dark energy could have gravitational origin. Some important examples of the alteration of gravitational dynamics were discussed in Section 1.5. Among the alternative gravitational models, I investigated the RS2 model in more detail in Section 1.6.

One of the aims of the thesis was the examination of the effects of the gravitational dynamics compared to general relativity (Chapter 2). An other task was the consideration of a new dark energy model discovered in [1].

3+1+1 gravitational dynamics

In Section 2.1, I developed a 3+1+1 covariant formalism of the RS2 model which generalized previously used methods ([2], [3], [4]). I gave the generic equations, which are valid for any brane embedding both on the brane and in the outer 5d regions, in terms of kinematic, gravito-electro-magnetic and matter variables. I did not use any assumptions for the symmetries of 5d space-time, for embedding of the brane, and for the matter sources. The commutation relations of the derivatives and transformations of the quantities were also given for the infinitesimal change in the basis. The latter one is important in the perturbation theory.

I derived the expression of the local 3d curvature tensor in terms of 3+1+1 variables in Subsection 2.1.5. This is the 3+1+1 decomposition of the 3d Riemann tensor for vanishing vorticities. I derived the Friedmann equation (which is one of the basic equation in cosmology) from its corresponding contraction (from 3d Riemann curvature scalar).

The derivation of generic 3+1+1 equations (Subsection 2.1.6 and in Appendix B.3) is valid in 5d regions and along the brane if the gravitational law is given by the 5d Einstein equation. They are also valid for the DGP (Dvali-Gabadadze-Porrati) model. The description was specified for the RS2 model in Section 2.1 by joining along the brane two 5d regions [Eqs. (2.74)-(2.77)]. These junction conditions could be generalized easily for the DGP model.

The gravitational dynamics on the brane can be derived from a subgroup of generic 3+1+1 equations (see Subsection 2.1.7). These equations were known in the particular case of a symmetric embedding of the brane into a cosmological vacuum 5d space-time [3]. I have corrected some mistakes in the literature. The brane equations do not give a closed system. The equations (2.125)-(2.127) offer a more generic closure condition than what was given before.

I rewrote the source terms of the effective Einstein equation in terms of the 3+1+1 covariant

variables in Subsection 2.1.7. In Subsection 2.1.8, the most important equations in cosmology, namely Friedmann-, Raychaudhuri- and energy-balance equation, were given in a decomposed form. I established the correspondence with the results of [163]. For further applications I gave the quantities of 3+1+1 formalism for an anisotropic brane [169].

The formalisms ([3] and [4]) generalized in this thesis were not suitable for the investigation of generic cosmological perturbations. Only vorticity-free space-times can be considered by the formalism developed in Ref. [4]. The Eqs. of Ref. [3] do not compose a closed system. The developed 3+1+1 covariant formalism is suitable for the investigation of generic cosmological perturbations and for finding brane black hole solutions.

Stationary vacuum brane space-times with local rotational symmetry

In Section 2.2, I have employed the 3+1+1 covariant formalism in the case of special symmetries for finding a new brane space-time. The brane is stationary and locally rotationally symmetric (LRS). The local rotational symmetry selects a spatial direction unambiguously at each points, therefore I further decomposed the brane space-time into a 2+1+1 form. The thesis specializes to type I LRS (LRS I) space-times where the time-like vector appearing in the decomposition has vorticity. From the generic equations, I have derived two coupled second order, nonlinear differential equations by imposing an ansatz for the anisotropic pressure term of Weyl fluid. Due to the non-linearity of the equations, I searched for a particular solution.

I have found a space-time similar to the charged Taub-NUT-(A)dS space-time of general relativity after a formal identification of the tidal charge with the square of electric charge. The Taub-NUT-(A)dS space-time describes an LRS I symmetric electrically charged black hole containing also a NUT (Newman-Unti-Tamburino) charge. As a consequence of the NUT charge, the space-time has closed time-like curves in some regions. The brane solution does not have electric charge, however a tidal charge appears due to the non-local effects of higher dimensional gravity. While the electric charge squared weakens the gravity attraction of a black hole, the tidal charge can make it stronger depending on its sign. The new space-time can be interpreted as tidal charged Taub-NUT-(A)dS brane. For the special case of the vanishing NUT charge, it agrees with the spherical symmetric brane solution given by [183].

The extension of the 5d Birkhoff theorem

The five-dimensional Birkhoff theorem states that the 5d space-times with negative cosmological constant containing a Friedmann brane and having its symmetries along the extra dimension are static and belong to the generalized Schwarzschild - Anti-de Sitter class [6], [133]. The theorem is violated by the Gergely-Maartens (GM) space-time [7] which does not belong to this class but has the same symmetries. The proof given in [6] cannot be applied for this space-time.

It was shown in [7] that, in case of 5d negative cosmological constant, some of the scalars of the GM solutions are identical with the corresponding scalars of the degenerated horizon of the extremal Schwarzschild - Anti-de Sitter space-time with negative curvature index ($SAdS_{5-}$), and it was conjectured that there may be a tight relation between the GM metric and the degenerated horizon of $SAdS_{5-}$.

In Section 2.3, I have proved that in the case of negative cosmological constant the GM metric describes the neighborhood of degenerated horizons of hyperbolic Schwarzschild - Anti-de Sitter space-time occurring in the 5d Birkhoff theorem.

For positive cosmological constant, the GM space-time gives the neighborhood of the degenerated horizon of the 5d Schwarzschild-de Sitter space-times.

In general relativity, a similar relation is known between the Bertotti-Robinson and the extremal Reissner-Nordström space-times. This is reestablished in Appendix C.

The evolution of closed Friedmann branes immersed in 5d space-time containing radiating black hole

In Section 2.4, I have described the effect of the radiation of a higher dimensional black hole on a closed brane. The system of equations describing brane-worlds immersed asymmetrically in 5d space-time was derived from generic equations of 3+1+1 covariant formalism when only one of 5d regions contains black hole.

In the most generic situation, parts of the Hawking radiation are absorbed and reflected by and transmitted through the brane. By considering only one (either in- or outgoing) component of the radiation in geometrical optics limit, the 5d regions become VAdS₅ regions. I did not investigate the reflected radiation case because of the missing space-time solution of 5d Einstein equation containing cosmological constant and two component radiation. I investigated the early Universe, thus the brane was radiation dominated.

First, I considered a numerical evolution when the 5d black hole does not radiate. For curvature index $k = 1$ and brane cosmological constant $\Lambda = 0$ the radiation dominated Universe collapsed into a Big Crunch similarly as in general relativity.

Taking the effects of Hawking radiation into account, it was found that

- the Hawking radiation changes perturbatively the cosmological evolution with respect to the nonradiating case as two competing small effects appears:
 - the absorbed radiation increases the self-gravity of the brane leading to faster recollapse of the Universe;
 - the pressure of the Hawking radiation pushes away the brane from the black hole, contributing to an accelerated cosmological expansion;
- for values of transmission smaller than 0.275 critical initial brane energy densities $\widehat{\rho}_0^{crit}$ exist for which the competing two effects nearly cancel each other;
- at larger transmissions, the critical brane energy density decreases;
- if the initial energy density $\widehat{\rho}_0$ is smaller than $\widehat{\rho}_0^{crit}$, then the radiation pressure is dominant, while if $\widehat{\rho}_0 > \widehat{\rho}_0^{crit}$ the self-gravity caused by Hawking radiation is dominant;
- the recollapse of the semi-transparent brane is faster for high transmissions.

Luminosity-redshift relation and cosmological test of generalized RS2 brane models with Weyl fluid

In Section 2.5.1 I have derived analytically the luminosity-redshift relations in terms of elliptic integrals. The studied \mathcal{Z}_2 symmetrically embedded flat Friedmann branes were

- Randall-Sundrum branes with fine-tuning (vanishing brane cosmological constant Λ). This is the original RS2 model. The luminosity-redshift relation was given by elliptic integrals;
- the models with $\Lambda = \kappa^2 \lambda / 2$ (λ is the brane tension, κ^2 is the gravitational coupling constant). The luminosity-redshift relation was given in terms of elementary functions;

- the contributions arising from the Weyl fluid and from the quadratic terms of energy-momentum tensor are small and $\Lambda \neq 0$. The model has three cosmological parameters: Ω_ρ (cold dark matter), Ω_d (Weyl fluid), Ω_Λ (brane cosmological constant) satisfying $\Omega_\rho + \Omega_d + \Omega_\Lambda = 1$. For specific choice of the Weyl contribution the brane radiates. If it radiates, there is an energy transfer between the brane and the black holes of the 5d regions (LWRS model). The luminosity-redshift relation was given by elliptic integrals.

In the first two cases the 5d regions are SAdS₅ while in the LWRS model are VAdS₅. In the LWRS model the radiation escaping from the brane is absorbed by 5d black holes having increasing mass parameters as $m \propto a^\alpha$, where $1 \leq \alpha \leq 4$ and a is the scale factor. The interest of the model is that instead of the dark matter, the structure formation can be explained by Weyl fluid appearing due to Weyl curvature of 5d space-time [206], [207].

In Subsection 2.5.2, the listed models were compared to the Gold2006 supernovae dataset. The Randall-Sundrum branes with fine-tuning were not favoured by the observations. The models with $\Lambda = \kappa^2 \lambda / 2$ are allowed by the supernovae dataset, however are ruled out by the low value of the brane tension, which would be in disagreement with other cosmological and astrophysical predictions.

For LWRS models with $\alpha = 0$ the best fit cosmological parameters are perfect accordance with WMAP 3-year data. The LWRS models with $\alpha = 1$ and $\alpha = 4$ agree formally with Λ CDM with the dark matter and dark energy having partially geometric origin. For $\alpha = 2$ and $\alpha = 3$ the confrontation with observations does not select unambiguously cosmological parameters. For increasing α the allowed range of Ω_d becomes wider.

Research results on a tachyonic cosmological model

The tachyonic field appears in string theories [58]-[61], but in the thesis it was introduced as a natural field theory generalization of the relativistic particle in one dimension. The interest of the scalar field is that its variation velocity can be smaller and higher than the speed of light. In the second case, the field does not violate the strong energy condition. A cosmological model has to produce an accelerating expansion in order to fit the supernova dataset. Therefore the field is in the subluminal domain at present.

The compatibility of this model with the supernovae dataset was described in Chapter 3.1, establishing the tachyonic field as a new dark energy candidate. I have determined the parameter range where the fitting is good with SNIa data. In this parameter range a subgroup of the trajectories run into a new type of future singularity, named Big Brake. The time scale to reach the Big Brake is similar to the age of the Universe.

For the trajectories heading towards Big Brake the accelerating expansion has to turn into a slowing one at some part because the singularity is inside the subluminal domain. In some cases it may be possible for this transition to occur already in the recent past (for $z < 0.1$).

The best fitting trajectories with distant past indicate that the tachyon field behaved as cold dark matter. Therefore, it is conceivable that the tachyon field may provide a unified dark energy fluid model.

Because the geodesic equation is not singular at the Big Brake, the geodesics can be continued across the singularity. The Big Brake is not a final state of the Universe, the Universe recollapses and runs into a Big Crunch singularity.

Köszönetnyilvánítás

Mindenek előtt szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek **Dr. Gergely Árpád Lászlónak**, aki irányította tevékenységemet a PhD éveim alatt. Az ő tudományos és személyes támogatása nélkül ez a munka nem jöhetett volna létre. A vezetése alatt eltöltött évek rendkívül inspirálóan hatottak rám, mind szakmailag, mind emberileg sokat tanultam tőle.

Köszönötemet fejezem ki **Kamenshchik Alexander Yu.-nak**, aki bevezetett a sötét energia modellek világába.

Szintén köszönötemet fejezem ki **Kovács Zoltán, Mikóczy Balázs, Szabó M. Gyula és Vasúth Mátyás-nak**, akik építő megjegyzései ugyancsak hozzájárultak az eredmények elérésében.

Köszönettel adózom **Hammer Dóra, Horváth Gyula, Mező Tamás, Mészáros Szabolcs, Mikóczy Balázs** és sokan másoknak, akik baráti támogatására mindig számíthattam.

Szeretném megköszönni a Szegedi Tudományegyetem Kísérleti Fizikai, valamint Elméleti Fizikai Tanszékeinek, hogy zavartalan kutatási feltételeket biztosítottak. Külön köszönettel tartozom **Szatmári Sándor Professzornak**, aki támogatásával az említett tanszékek 2009 Szeptemberétől állást biztosítottak számomra. Szintén köszönettel tartozom az OTKA 69036 pályázatnak, amiért 2007 Szeptembertől 2009 Augusztusig állást adott.

Végül, de nem utolsó sorban szeretnék köszönetet mondani családomnak szeretetükért és odaadó támogatásukért.

Irodalomjegyzék

- [1] V. Gorini, A. Yu. Kamenshchik, U. Moschella és V. Pasquier: *Tachyons: Scalar Fields and Cosmology*, *Phys. Rev. D* **69** 123512 (2004), e-print: arXiv:hep-th/0311111
- [2] G. F. R. Ellis: *Relativistic Cosmology, General Relativity and Cosmology* könyvben, R. K. Sachs szerkesztésében, New York, Academic (1971)
- [3] R. Maartens: *Cosmological dynamics on the brane*, *Phys. Rev. D* **62** 084023 (2000), e-print: arXiv:hep-th/0004166. Jelölési konverziók:
 $(-\tilde{\kappa}^4/\kappa^4 U, \tilde{\kappa}^4/\kappa^4 Q_a, -\tilde{\kappa}^4/\kappa^4 P_{ab}, -\omega_a) \rightarrow (\mathcal{E}, \hat{\mathcal{E}}_a, \hat{\mathcal{E}}_{ab}, \omega_a)$
- [4] L. Á. Gergely és Z. Kovács: *Gravitational dynamics in $s+1+1$ dimensions*, *Phys. Rev. D* **72** 064015 (2005), e-print: arXiv:gr-qc/0507020. Itt az 5d téridő duplán fóliázható, ezért $\hat{K}^a = -L^a = -K^a$, és $\omega^a = \hat{\omega}^a = 0$. Jelölési konverziók:
 $(n^a, l^a, {}^{(s+1)}g_{ab}, g_{ab}, \alpha_a, \beta_a, L, K, L_a = K_a, L_{ab}) \rightarrow (u^a, n^a, g_{ab}, h_{ab}, A_a, \hat{A}_a, K, \hat{K}, -L_a, \hat{K}_{ab})$
- [5] L. Á. Gergely és Z. Kovács: *Gravitational dynamics in $s+1+1$ dimensions II. Hamiltonian theory*, *Phys. Rev. D* **77** 024003 (2008), e-print: arXiv:0709.2131
- [6] P. Bowcock, C. Charmousis, és R. Gregory, General brane cosmologies and their global spacetime structure, *Class. Quantum Grav.* **17** 4745 (2000), e-print: arXiv:hep-th/0007177
- [7] L. Á. Gergely és R. Maartens: *Brane-world generalizations of the Einstein static universe*, *Class. Quantum Grav.* **19** 213 (2002), e-print: arXiv:gr-qc/0105058. Jelölési konverziók:
 $(\alpha, \beta^2, \mu, t, K_i) \rightarrow (\text{sgn}(D^2), |D^2|, 2m, \tau, K_i^{GM})$
- [8] S. A. Shtetman, S. D. Landy, A. Oemler, D. L. Tucker és tsai: *The Las Campanas Redshift Survey*, *Astrophys. J.* **470** 172 (1996), e-print: arXiv:astro-ph/9604167
- [9] S. Cole, W. J. Percival, J. A. Peacock, P. Norberg és tsai: *The 2dF Galaxy Redshift Survey: Power-spectrum analysis of the final dataset and cosmological implications*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **362** 505 (2005), e-print: arXiv:astro-ph/0501174
- [10] Jennifer K. Adelman-McCarthy, M. A. Agüeros, S. S. Allam, C. A. Prieto és tsai: *The Sixth Data Release of the Sloan Digital Sky Survey*, *Astrophys. J. Suppl.* **175** 297 (2008), e-print: arXiv:0707.3413
- [11] R. M. Wald: *General Relativity*, The University of Chicago Press (1984)
- [12] F. Zwicky: *Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln*, *Helv. Phys. Acta* **6** 110 (1933)
- [13] Zs. Frei és A. Patkós: *Infláció Kozmológia*, Typotex (2005)
- [14] W. Hu: *Lecture Notes on CMB Theory: From Nucleosynthesis to Recombination*, in XIX Canary Island Winter School of Astrophysics, ed. R. Rebolo and J.A. Rubino-Martin (2008), e-print: arXiv:0802.3688

- [15] D.J. Fixsen, E. S. Cheng, J. M. Gales, J. C. Mather és tsai: *The Cosmic Microwave Background Spectrum from the Full COBE/FIRAS Data Set*, *Astrophys. J.* **473** 576 (1996), e-print: arXiv:astro-ph/9605054
- [16] G. Hinshaw, J. L. Weiland, R. S. Hill, N. Odegard és tsai: *Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Data Processing, Sky Maps, and Basic Results*, *Astrophys. J. Suppl.* **180** 225 (2009), e-print: arXiv:0803.0732
- [17] A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis, A. Clocchiattia és tsai: *Observational evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant*, *Astrophys. J.* **116** 1009 (1998), e-print: arXiv:astro-ph/9805201
- [18] A. G. Riess, L-G. Strolger, J. Tonry, S. Casertano és tsai: *Type Ia Supernova Discoveries at $z>1$ from the Hubble Space Telescope: Evidence for Past Deceleration and Constraints on Dark Energy Evolution*, *Astrophys. J.* **607** 665 (2005), e-print: arXiv:astro-ph/0402512
- [19] B. Schmidt: *The new cosmology, 16th Int. Summer School kiadványában*, Singapore World Scientific (2003)
- [20] E. Komatsu, J. Dunkley, M. R. Nolta, C. L. Bennett és tsai, *Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation*, *Astrophys. J. Suppl.* **180** 330 (2009), e-print: arXiv:0803.0547
- [21] N. E. Mavromatos: *LHC Physics and Cosmology*, Előadás a “Lake Louise Winter Institute”-on (2007), e-print: arXiv:0708.0134
- [22] <http://map.gsfc.nasa.gov/media/080998/index.html>
- [23] M. P. Hobson, G. P. Efstathiou és A. N. Lasenby, *General Relativity: An Introduction for Physicists*, Cambridge Univ. Press (2006)
- [24] M. R. Nolta, J. Dunkley, R. S. Hill, G. Hinshaw és tsai: *Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Angular Power Spectra*, *Astrophys. J. Suppl.* **180** 296 (2009), e-print: arXiv:0803.0593
- [25] V. Mukhanov: *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge Univ. Press (2005)
- [26] A. Liddle: *An Introduction to Modern Cosmology*, John Wiley & Sons (2003)
- [27] E. J. Copeland, M. Sami és S. Tsujikawa: *Dynamics of dark energy*, *Int. J. Mod. Phys. D* **15** 1753 (2006), e-print: arXiv:hep-th/0603057
- [28] L. Perivolaropoulos és A. Shafieloo: *Bright High z SNIa: A Challenge for LCDM?*, *Phys. Rev. D* **79** 123502 (2009), e-print: arXiv:0811.2802
- [29] V. Sahni és L. Wang: *A New Cosmological Model of Quintessence and Dark Matter*, *Phys. Rev. D* **62** 103517 (2000), e-print: arXiv:astro-ph/9910097
- [30] V. Sahni és A. Starobinsky: *The Case for a Positive Cosmological Lambda-term*, *Int. J. Mod. Phys. D* **9** 373 (2000), e-print: arXiv:astro-ph/9904398
- [31] P. G. Ferreira és M. Joyce: *Cosmology with a Primordial Scaling Field*, *Phys. Rev. D* **58** 023503 (1998), e-print: arXiv:astro-ph/9711102
- [32] B. Ratra és P. J. E. Peebles: *Cosmological consequences of a rolling homogeneous scalar field*, *Phys. Rev. D* **37** 3406 (1988)

- [33] P. Astier, J. Guy, N. Regnault, R. Pain és tsai: *The Supernova Legacy Survey: Measurement of Ω_m , Ω_Λ and w from the First Year Data Set*, *Astron. Astrophys.* **447** 31 (2006), e-print: arXiv:astro-ph/0510447
- [34] G. Barro Calvo és A. L. Maroto: *Confronting quintessence models with recent high-redshift supernovae data*, *Phys. Rev. D* **74** 083519 (2006), e-print: arXiv:astro-ph/0604409
- [35] L. Samushia: *Constraining scalar field dark energy with cosmological observations*, PhD dolgozat (2009), e-print: arXiv:0908.4597
- [36] P. Brax és Jerome Martin: *Quintessence and Supergravity*, *Phys. Lett. B* **468** 40 (1999), e-print: arXiv:astro-ph/9905040
- [37] P. Brax és Jerome Martin: *The Robustness of Quintessence*, *Phys. Rev. D* **61** 103502 (2000), e-print: arXiv:astro-ph/9912046
- [38] T. Barreiro, E. J. Copeland és N. J. Nunes: *Quintessence arising from exponential potentials*, *Phys. Rev. D* **61** (2000), 127301 e-print: arXiv:astro-ph/9910214
- [39] I. Zlatev, L. Wang és P. J. Steinhardt: *Quintessence, Cosmic Coincidence, and the Cosmological Constant*, *Phys. Rev. Lett.* **82** 896 (1999) e-print: arXiv:astro-ph/9807002
- [40] A. R Liddle és R. J Scherrer: *A classification of scalar field potentials with cosmological scaling solutions*, *Phys. Rev. D* **59** 023509 (1999), e-print: arXiv:astro-ph/9809272
- [41] V. Sahni, Dark Matter and Dark Energy: *Lect. Notes Phys.* **653** 141 (2004), e-print: arXiv:astro-ph/0403324
- [42] J. S. Bagla, H. K. Jassal és T. Padmanabhan: *Cosmology with tachyon field as dark energy*, *Phys. Rev. D* **67** 063504 (2003), e-print: arXiv:astro-ph/0212198
- [43] A. Frolov, L. Kofman és A. Starobinsky: *Prospects and Problems of Tachyon Matter Cosmology*, *Phys. Lett. B* **545** 8 (2002), e-print: arXiv:hep-th/0204187
- [44] S. M. Carroll, M. Hoffman és M. Trodden: *Can the dark energy equation-of-state parameter w be less than -1?*, *Phys. Rev. D* **68** 023509 (2003), e-print: arXiv:astro-ph/0301273
- [45] P. Singh, M. Sami és Naresh Dadhich: *Cosmological Dynamics of Phantom Field*, *Phys. Rev. D* **68** 023522 (2003), e-print: arXiv:hep-th/0305110
- [46] A. Yu. Kamenshchik, U. Moschella és V. Pasquier: *An alternative to quintessence*, *Phys. Lett. B* **511** 265 (2001), e-print: arXiv:gr-qc/0103004
- [47] L. Amendola, F. Finelli, C. Burigana és D. Carturan: *WMAP and the Generalized Chaplygin Gas*, *JCAP* **0307** 005 (2003), e-print: arXiv:astro-ph/0304325
- [48] H. Sandvik, M. Tegmark, M. Zaldarriaga és I. Waga: *The end of unified dark matter?*, *Phys. Rev. D* **69** 123524 (2004), e-print: arXiv:astro-ph/0212114
- [49] U. Alam, V. Sahni és A. A. Starobinsky: *The case for dynamical dark energy revisited*, *JCAP* **0406** 008 (2004), e-print: arXiv:astro-ph/0403687
- [50] A. Shafieloo, U. Alam, V. Sahni és A. A. Starobinsky: *Smoothing Supernova Data to Reconstruct the Expansion History of the Universe and its Age*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **366** 1081 (2006), e-print: arXiv:astro-ph/0505329
- [51] S. Nesseris és L. Perivolaropoulos: *A comparison of cosmological models using recent supernova data*, *Phys. Rev. D* **70** 043531 (2004), e-print: arXiv:astro-ph/0401556

- [52] C.-J. Feng: *Reconstructing Quintom from Ricci Dark Energy*, *Phys. Lett. B* **672** 94 (2009), e-print: arXiv:0810.2594
- [53] S.-G. Shi, Y.-S. Piao és C.-F. Qiao: *Cosmological Evolution of a Tachyon-Quintom Model of Dark Energy*, *JCAP* **0904** 027 (2009), e-print: arXiv:0812.4022
- [54] S. J. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, R.A. Knop és tsai: *Measurements of Omega and Lambda from 42 High-redshift Supernovae*, *Astrophys. J.* **517** 565 (1999), e-print: arXiv:astro-ph/9812133
- [55] N. A. Bachall, J.P. Ostriker, S. Perlmutter és P.J. Steinhardt: *The Cosmic Triangle: Revealing the State of the Universe*, *Science* **284** 1481 (1999), e-print: arXiv:astro-ph/9906463
- [56] V. Sahni és A. A. Starobinsky: *The Case for a Positive Cosmological Lambda-term*, *Int. J. Mod. Phys. D* **9** 373 (2000), e-print: arXiv:astro-ph/9904398
- [57] T. Padmanabhan: *Cosmological constant - the weight of the vacuum*, *Phys. Rep.* **380** 235 (2003), e-print: arXiv:hep-th/0212290
- [58] A. Sen: *Rolling Tachyon*, *JHEP* **0204** 048 (2002), e-print: arXiv:hep-th/0203211
- [59] A. Sen: *Tachyon Matter*, *JHEP* **0207** 065 (2002), e-print: arXiv:hep-th/0203265
- [60] A. Sen: *Field Theory of Tachyon Matter*, *Mod. Phys. Lett. A* **17** 1797 (2002), e-print: arXiv:hep-th/0204143
- [61] M. R. Garousi: *Tachyon couplings on non-BPS D-branes and Dirac-Born-Infeld action*, *Nucl. Phys. B* **584** 284 (2000), e-print: arXiv:hep-th/0003122
- [62] A. A. Starobinsky: *How to determine an effective potential for a variable cosmological term*, *JETP Lett.* **68** 757 (1998), e-print: arXiv:astro-ph/9810431
- [63] T. Padmanabhan: *Accelerated expansion of the universe driven by tachyonic matter*, *Phys. Rev. D* **66** 021301 (2002), e-print: arXiv:hep-th/0204150
- [64] J. D. Barrow és S. Z. W. Lip: *Classical Stability of Sudden and Big Rip Singularities*, *Phys. Rev. D* **80** 043518 (2009), e-print: arXiv:0901.1626
- [65] J. D. Barrow: *More General Sudden Singularities*, *Class. Quant. Grav.* **21** 5619 (2004), e-print: arXiv:gr-qc/0409062
- [66] M. P. Dabrowski: *Dark energy from timely and spatial singularities of pressure*, a "Grassmannian Conference in Fundamental Cosmology (Grasscosmofun'09), Szczecin, Poland" konferencián, a konferencia kiadvány az Annalen der Physik-ben fog megjelenni, az előadás internet elérhetősége: http://cosmo.fiz.univ.szczecin.pl/pliki/grasscosmofun/talks/M_Dabrowski/GCOSMO2.PDF
- [67] R. R. Caldwell, M. Kamionkowski és N. N. Weinberg: *Phantom Energy and Cosmic Doomsday*, *Phys. Rev. Lett.* **91** 071301 (2003) e-print: arXiv:astro-ph/0302506
- [68] S. Nojiri és S. D. Odintsov: *The final state and thermodynamics of dark energy universe*, *Phys. Rev. D* **70** 103522 (2004), e-print: arXiv:hep-th/0408170
- [69] J. D. Barrow: *Sudden Future Singularities*, *Class. Quant. Grav.* **21** L79 (2004), e-print: arXiv:gr-qc/0403084
- [70] S. Nojiri, S. D. Odintsov és S. Tsujikawa: *Properties of singularities in (phantom) dark energy universe*, *Phys. Rev. D* **71** 063004 (2005), e-print: arXiv:hep-th/0501025

- [71] M. P. Dabrowski és T. Denkiewicz: *Barotropic index w-singularities in cosmology*, *Phys. Rev. D* **79** 063521 (2009), e-print: arXiv:0902.3107
- [72] V. Faraoni: *Phantom cosmology with general potentials*, *Class. Quant. Grav.* **22** 3235 (2005), e-print: arXiv:gr-qc/0506095
- [73] M. Bouhmadi-Lopez, P. F. Gonzalez-Diaz és P. Martin-Moruno: *On the generalised Chaplygin gas: worse than a big rip or quieter than a sudden singularity?*, *Int. J. Mod. Phys. D* **17** 2269 (2008), e-print: arXiv:0707.2390
- [74] M. Bojowald: *Absence of Singularity in Loop Quantum Cosmology*, *Phys. Rev. Lett.* **86** 5227 (2001), e-print: arXiv:gr-qc/0102069
- [75] J. Brunnemann és T. Thiemann: *On (Cosmological) Singularity Avoidance in Loop Quantum Gravity*, *Class. Quant. Grav.* **23** 1395 (2006), e-print: arXiv:gr-qc/0505032
- [76] M. Sami, P. Singh és S. Tsujikawa: *Avoidance of future singularities in loop quantum cosmology*, *Phys. Rev. D* **74** 043514 (2006), e-print: arXiv:gr-qc/0605113
- [77] M. P. Dabrowski, C. Kiefer és B. Sandhöfer: *Quantum phantom cosmology*, *Phys. Rev. D* **74** 044022 (2006), e-print: arXiv:hep-th/0605229
- [78] A. Kamenshchik, C. Kiefer és B. Sandhöfer: *Quantum cosmology with big-brake singularity*, *Phys. Rev. D* **76** 064032 (2007), e-print: arXiv:0705.1688
- [79] C. Kiefer és B. Sandhöfer: *Quantum Cosmology*, “Beyond the Big Bang”-ben szerkesztette R. Vaas (Springer 2008), e-print: arXiv:0804.0672
- [80] C. Kiefer: *Quantum geometrodynamics: whence, whither?*, *Gen. Rel. Grav.* **41** 877 (2009), e-print: arXiv:0812.0295
- [81] P. Singh: *Are loop quantum cosmos never singular?*, *Class. Quant. Grav.* **26** 125005 (2009), e-print: arXiv:0901.2750
- [82] M. Bouhmadi-Lopez, C. Kiefer, B. Sandhöfer és P. V. Moniz: *On the quantum fate of singularities in a dark-energy dominated universe*, *Phys. Rev. D* **79** 124035 (2009), e-print: arXiv:0905.2421
- [83] H. A. Buchdahl: *Non-linear Lagrangians and cosmological theory*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **150** 1 (1970)
- [84] S. Nojiri és S.D. Odintsov: *Introduction to Modified Gravity and Gravitational Alternative for Dark Energy*, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **4** 115 (2007), e-print: arXiv:hep-th/0601213
- [85] S. Capozziello és M. Francaviglia: *Extended Theories of Gravity and their Cosmological and Astrophysical Applications*, *Gen. Rel. Grav.* **40** 357 (2008), e-print: arXiv:0706.1146
- [86] T. P. Sotiriou és Valerio Faraoni: *$f(R)$ Theories Of Gravity*, *Rev. Mod. Phys.* **82** 451 (2010), e-print: arXiv:0805.1726
- [87] T. P. Sotiriou: *Modified Actions for Gravity: Theory and Phenomenology*, PhD dolgozat (Advisors: Stefano Liberati and John C. Miller) e-print: arXiv:0710.4438
- [88] N. Goheer, J. Larena és P. K. S. Dunsby: *Power-law cosmic expansion in $f(R)$ gravity models*, *Phys. Rev. D* **80** 061301 (2009), e-print: arXiv:0906.3860
- [89] O. Mena, J. Santiago és J. Weller: *Constraining Inverse Curvature Gravity with Supernovae*, *Phys. Rev. Lett.* **96** 041103 (2006), e-print: arXiv:astro-ph/0510453

- [90] T. P. Sotiriou és S. Liberati: *Metric-affine $f(R)$ theories of gravity*, *Annals. Phys.* **322** 935 (2007), e-print: arXiv:gr-qc/0604006
- [91] T. Chiba: *$1/R$ gravity and Scalar-Tensor Gravity*, *Phys. Lett. B* **575** 1 (2003), e-print: arXiv:astro-ph/0307338
- [92] L. Amendola és S. Tsujikawa: *Phantom crossing, equation-of-state singularities, and local gravity constraints in $f(R)$ models*, *Phys. Lett. B* **660** 125 e-print: arXiv:0705.0396
- [93] T. P. Sotiriou: *The nearly Newtonian regime in Non-Linear Theories of Gravity*, *Gen. Relat. Grav.* **38** 1407 (2006), e-print: arXiv:gr-qc/0507027
- [94] A. D. Dolgov és M. Kawasaki: *Can modified gravity explain accelerated cosmic expansion?*, *Phys. Lett. B* **573** 1 (2003), e-print: arXiv:astro-ph/0307285
- [95] L. Amendola, D. Polarski és S. Tsujikawa: *Are $f(R)$ dark energy models cosmologically viable?*, *Phys. Rev. Lett.* **98** 131302 (2007), e-print: arXiv:astro-ph/0603703
- [96] M. Amarzguoui, O. Elgaroy, D. F. Mota és T. Multamaki: *Cosmological constraints on $f(R)$ gravity theories within the Palatini approach*, *Astron. Astrophys.* **454** 707 (2006), e-print: arXiv:astro-ph/0510519
- [97] S. Fay, R. Tavakol és S. Tsujikawa: *$f(R)$ gravity theories in Palatini formalism: cosmological dynamics and observational constraints*, *Phys. Rev. D* **75** 063509 (2007), e-print: arXiv:astro-ph/0701479
- [98] T. P. Sotiriou: *Unification of inflation and cosmic acceleration in the Palatini formalism*, *Phys. Rev. D* **73** 063515 (2006), e-print: arXiv:gr-qc/0509029
- [99] X. H. Meng és P. Wang: *Modified Friedmann Equations in R^{-1} -Modified Gravity*, *Class. Quant. Grav.* **20** 4949 (2003), e-print: arXiv:astro-ph/0307354
- [100] X. H. Meng és P. Wang: *Cosmological Evolution in $1/R$ -Gravity Theory*, *Class. Quant. Grav.* **21** 951 (2004), e-print: arXiv:astro-ph/0308031
- [101] J. Santos, J. S. Alcaniz, F. C. Carvalho és N. Pires: *Latest supernovae constraints on $f(R)$ cosmologies*, *Phys. Lett. B* **669** 14 (2008), e-print: arXiv:0808.4152
- [102] R. Reyes, R. Mandelbaum, U. Seljak, T. Baldauf, J. E. Gunn, L. Lombriser és R. E. Smith: *Confirmation of general relativity on large scale from weak lensing and galaxy velocities*, *Nature* **464** 256, e-print: arXiv:1003.2185
- [103] S. M. Carroll, V. Duvvuri, M. Trodden és M. S. Turner: *Is Cosmic Speed-Up Due to New Gravitational Physics?*, *Phys. Rev. D* **70** 043528 (2004), e-print: arXiv:astro-ph/0306438
- [104] M. Milgrom: *A modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis*, *Astrophys. J.* **270** 365 (1983)
- [105] J. D. Bekenstein: *Relativistic gravitation theory for the MOND paradigm*, *Phys. Rev. D* **70** 083509 (2004), Erratum *ibid. D* **71** 069901 (2005), e-print: arXiv:astro-ph/0403694
- [106] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos és G. Dvali: *The Hierarchy Problem and New Dimensions at a Millimeter*, *Phys. Lett. B* **429** 263 (1998), e-print: arXiv:hep-ph/9803315
- [107] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos és G. Dvali: *Phenomenology Astrophysics and Cosmology of Theories with Sub-Millimeter Dimensions and TeV Scale Quantum Gravity*, *Phys. Rev. D* **59** 086004 (1999), e-print: arXiv:hep-ph/9807344

- [108] L. Randall és R. Sundrum: *Large mass hierarchy from a small extra dimension*, *Phys. Rev. Lett.* **83** 3370 (1999), e-print: arXiv:hep-ph/9905221
- [109] L. Randall és R. Sundrum: *An Alternative to Compactification*, *Phys. Rev. Lett.* **83** 4690 (1999), e-print: arXiv:hep-th/9906064
- [110] R. Maartens: *Brane-world gravity*, *Living Rev. Rel.* **7** 1 (2004), e-print: arXiv:gr-qc/0312059
- [111] P. Binétruy, C. Deffayet, U. Ellwanger és D. Langlois: *Brane cosmological evolution in a bulk with cosmological constant*, *Phys. Lett. B* **477** 285 (2000), e-print: arXiv:hep-th/9910219
- [112] M. Bruni, C. Germani és R. Maartens: *Gravitational Collapse on the Brane: A No-Go Theorem*, *Phys. Rev. Lett.* **87** 231302 (2001), e-print: arXiv:gr-qc/0108013
- [113] S. Pal: *Braneworld gravitational collapse from a radiative bulk*, *Phys. Rev. D* **74** 124019 (2006), e-print: arXiv:gr-qc/0609065
- [114] L. Á. Gergely: *Black holes and dark energy from gravitational collapse on the brane*, *JCAP* **0702** 027 (2007), e-print: arXiv:hep-th/0603254
- [115] M. K. Mak és T. Harko: *Can the galactic rotation curves be explained in brane world models?*, *Phys. Rev. D* **70** 024010 (2004), e-print: arXiv:gr-qc/0404104
- [116] S. Pal, S. Bharadway és S. Kar: *Can extra dimensional effects replace dark matter?*, *Phys. Lett. B* **609** 194 (2005), e-print: arXiv:gr-qc/0409023
- [117] T. Harko és K. S. Cheng: *Galactic metric, dark radiation, dark pressure and gravitational lensing in brane world models*, *Astrophys. J.* **636** 8 (2006), e-print: arXiv:astro-ph/0509576
- [118] T. Harko és K. S. Cheng: *The virial theorem and the dynamics of clusters of galaxies in the brane world models*, *Phys. Rev. D* **76** 044013 (2007), e-print: arXiv:0707.1128
- [119] G. Dvali, G. Gabadadze és M. Porrati: *4D Gravity on a Brane in 5D Minkowski Space*, *Phys. Lett. B* **485** 208 (2000), e-print: arXiv:hep-th/0005016
- [120] K. Koyama: *Are there ghosts in the self-accelerating brane universe?*, *Phys. Rev. D* **72** 123511 (2005), e-print: arXiv:hep-th/0503191
- [121] D. Gorbunov, K. Koyama és S. Sibiryakov: *More on ghosts in DGP model*, *Phys. Rev. D* **73** 044016 (2006), e-print: arXiv:hep-th/0512097
- [122] C. Charmousis, R. Gregory, N. Kaloper és A. Padilla: *DGP Spectroscopy*, *JHEP* **0610** 066 (2006), e-print: arXiv:hep-th/0604086
- [123] K. Izumi, K. Koyama, és T. Tanaka, *Unexorcized ghost in DGP brane world*, *JHEP* **0704** 053 (2007), e-print: arXiv:hep-th/0610282
- [124] V. Sahni és Y. Shtanov: *Braneworld models of dark energy*, *JCAP* **0311** 014 (2003), e-print: arXiv:astro-ph/0202346
- [125] K. Maeda, S. Mizuno és T. Torii: *Effective Gravitational Equations on Brane World with Induced Gravity*, *Phys. Rev. D* **68** 024033 (2003), e-print: arXiv:gr-qc/0303039
- [126] L. Á. Gergely és R. Maartens: *Asymmetric brane-worlds with induced gravity*, *Phys. Rev. D* **71** 024032 (2005) e-print: arXiv:gr-qc/0411097
- [127] R. Lazkoz, R. Maartens és E. Majerotto: *Observational constraints on phantom-like braneworld cosmologies*, *Phys. Rev. D* **74** 083510 (2006), e-print: arXiv:astro-ph/0605701

- [128] C. Lanczos: *Ein vereinfachendes Koordinatensystem für Einsteinschen Gravitationsgleichungen*, *Phys. Zeit.* **23** 537 (1922); *Flächenhafte Verteilung der Materie in der Einsteinschen Gravitationstheorie*, *Ann. Phys. Leipzig* **74** 518 (1924)
- [129] W. Israel: *Singular Hypersurfaces and Thin Shells in General Relativity*, *Nouvou Cimento B* **XLIV** 4349 (1966); errata: *ibid.* **XLVIII** 2583 (1966)
- [130] László Á. Gergely: *Generalized Friedmann branes*, *Phys. Rev. D* **68** 124011 (2003), e-print: arXiv:gr-qc/0308072
- [131] J. Garriga és T. Tanaka: *Gravity in the Randall-Sundrum Brane World*, *Phys. Rev. Lett.* **84** 2778 (2000), e-print: arXiv:hep-th/9911055
- [132] S. B. Giddings, E. Katz és L. Randall: *Linearized Gravity in Brane Backgrounds*, *JHEP* **0003** 023 (2000), e-print: arXiv:hep-th/0002091
- [133] R. Gregory: *Braneworld Black Holes*, *Lect. Notes Phys.* **769** 259 (2009), e-print: arXiv:hep-th/0804.2595
- [134] A. Chamblin, A. Karch és A. Nayeri: *Thermal Equilibration of Brane-Worlds*, *Phys. Lett. B* **509** 163 (2001), e-print: arXiv:hep-th/0007060
- [135] C. Gordon és R. Maartens: *Density perturbations in the brane-world*, *Phys. Rev. D* **63** 044022 (2001), e-print: arXiv:hep-th/0009010
- [136] N. Kaloper: *Bent Domain Walls as Braneworlds*, *Phys. Rev. D* **60** 123506 (1999), e-print: arXiv:hep-th/9905210
- [137] J. Garriga és M. Sasaki: *Brane-world creation and black holes*, *Phys. Rev. D* **62** 043523 (2000), e-print: arXiv:hep-th/9912118
- [138] S. W. Hawking, T. Hertog és H. S. Reall: *Brane New World*, *Phys. Rev. D* **62** 043501 (2000), e-print: arXiv:hep-th/0003052
- [139] D. Langlois, R. Maartens és D. Wands: *Gravitational waves from inflation on the brane*, *Phys. Lett. B* **489** 259 (2000), e-print: arXiv:hep-th/0006007
- [140] H. A. Bridgman, K. A. Malik és D. Wands: *Cosmic vorticity on the brane*, *Phys. Rev. D* **63** 084012 (2001), e-print: arXiv:hep-th/0010133
- [141] H. A. Bridgman, K. A. Malik és D. Wands: *Cosmological perturbations in the bulk and on the brane*, *Phys. Rev. D* **65** 043502 (2002), e-print: arXiv:astro-ph/0107245
- [142] D. Langlois, R. Maartens, M. Sasaki és D. Wands: *Large-scale cosmological perturbations on the brane*, *Phys. Rev. D* **63** 084009 (2001), e-print: arXiv:hep-th/0012044
- [143] B. Leong, A. Challinor, R. Maartens és A. Lasenby: *Braneworld Tensor Anisotropies in the CMB*, *Phys. Rev. D* **66** 104010 (2002), e-print: arXiv:astro-ph/0208015
- [144] R. Durrer és P. Kocian: *Testing braneworlds with the binary pulsar*, *Class. Quantum Grav.* **21** 2127 (2004), e-print: arXiv:hep-th/0305181
- [145] S. Kinoshita, H. Kudoh, Y. Sendouda és K. Sato: *Quadrupole formula for Kaluza-Klein modes in the braneworld*, *Class. Quantum Grav.* **22** 3911 (2005), e-print: arXiv:gr-qc/0505011
- [146] J. C. Long, H. W. Chan, A. B. Churnside, E. A. Gulbis és tsai: *New experimental limits on macroscopic forces below 100 microns*, *Nature* **421** 922 (2003), e-print: arXiv:hep-ph/0210004

- [147] R. Maartens, D. Wands, B. A. Bassett és I. P. C. Heard: *Chaotic Inflation on the brane*, *Phys. Rev. D* **62** 041301(R) (2000), e-print: arXiv:hep-ph/9912464
- [148] C. Germani és R. Maartens: *Stars in the braneworld*, *Phys. Rev. D* **64** 124010 (2001), e-print: arXiv:hep-th/0107011
- [149] L. Á. Gergely, Z. Keresztes és M. Dwornik: *Second-order light deflection by tidal charged black holes on the brane*, *Class. Quantum Grav.* **26** 145002 (2009), e-print: arXiv:0903.1558
- [150] Z. Keresztes és L. Á. Gergely: *Covariant gravitational dynamics in 3+1+1 dimensions*, *Class. Quantum Grav.* **26** 204006 (2010), e-print: arXiv:0909.0490
- [151] Z. Keresztes és L. Á. Gergely: *3+1+1 dimensional covariant gravitational dynamics on an asymmetrically embedded brane: The average equations*, *Ann. Phys.* **19** 249 (2010), e-print: arXiv:0911.2495
- [152] Z. Keresztes, és L. Á. Gergely, *3+1+1 dimensional covariant gravitational dynamics on an asymmetrically embedded brane: The difference equations*, a 12. Marcel Grossmann konferencia (MG12), Párizs, Franciaország 2009, kiadványában fog megjelenni (2010), e-print: arXiv:0911.2495
- [153] S. W. Hawking: *Perturbations of an expanding universe*, *Astrophys. J.* **145** 544 (1966)
- [154] G. F. R. Ellis és M. Bruni: *Covariant and gauge-invariant approach to cosmological density fluctuations*, *Phys. Rev. D* **40** 1804 (1989)
- [155] G. F. R. Ellis, J. Hwang és M. Bruni: *Covariant and gauge-independent perfect-fluid Robertson-Walker perturbations*, *Phys. Rev. D* **40** 1819 (1989)
- [156] G. F. R. Ellis, M. Bruni és J. Hwang: *Density-gradient-vorticity relation in perfect-fluid Robertson-Walker perturbations*, *Phys. Rev. D* **42** 1035 (1990)
- [157] M. Bruni, P. K. S. Dunsby és G. F. R. Ellis: *Cosmological perturbations and the physical meaning of gauge-invariant variables*, *Astrophys. J.* **395** 34 (1992)
- [158] T. Gebbie és G. F. R. Ellis: *1+3 Covariant Cosmic Microwave Background anisotropies I: Algebraic relations for mode and multipole representations*, *Annals Phys.* **282** 285 (2000), e-print: arXiv:astro-ph/9804316
- [159] T. Gebbie, P. K. S. Dunsby és G. F. R. Ellis: *1+3 Covariant Cosmic Microwave Background anisotropies II: The almost - Friedmann Lemaitre model*, *Annals Phys.* **282** 321 (2000), e-print: arXiv:astro-ph/9904408
- [160] A. Challinor és A. Lasenby: *Cosmic microwave background anisotropies in the cold dark matter model: a covariant and gauge-invariant approach*, *Astrophys. J.* **513** 1 (1999)
- [161] R. Maartens, T. Gebbie és G. F. R. Ellis: *Cosmic microwave background anisotropies: Nonlinear dynamics*, *Phys. Rev. D* **59** 083506 (1999) e-print: arXiv:astro-ph/9808163
- [162] G. F. R. Ellis és H. van Elst: *Cosmological models* (Cargèse lectures 1998) (1998), e-print: arXiv:gr-qc/9812046
- [163] L. Á. Gergely: *Friedmann branes with variable tension*, *Phys. Rev. D* **78** 084006 (2008), e-print: arXiv:0806.3857. Megfeleltetés a cikk jelöléseivel: $(\Lambda_0, a^2 h_{ab}, \bar{L}) \rightarrow (\Lambda, h_{ab}, \langle L \rangle)$
- [164] A. Coley, R. Milson, V. Pravda és A. Pravdova: *Classification of the Weyl Tensor in Higher Dimensions*, *Class. Quantum Grav.* **21** 35 (2004) e-print: arXiv:gr-qc/0401008

- [165] J. M. M. Senovilla: *General Electric-Magnetic decomposition of fields, positivity and Rainich-like conditions*, “Spanish Relativity Meeting” kiadványában (2000), e-print: arXiv:gr-qc/0010095
- [166] J. D. Barrow, R. Maartens és C. G. Tsagas: *Cosmology with inhomogeneous magnetic fields*, *Phys. Rept.* **449** 131 (2007), e-print: arXiv:astro-ph/0611537
- [167] C. G. Tsagas, A. Challinor és R. Maartens: *Relativistic cosmology and large-scale structure*, *Phys. Rept.* **465** 61 (2008), e-print: arXiv:0705.4397
- [168] T. Shiromizu, K. Maeda és M. Sasaki: *The Einstein Equations on the 3-Brane World*, *Phys. Rev. D* **62** 024012 (2000), e-print: arXiv:gr-qc/9910076
- [169] A. Campos, R. Maartens, D. Matravers és C. F. Sopuerta: *Braneworld cosmological models with anisotropy*, *Phys. Rev. D* **68** 103520 (2003), e-print: arXiv:hep-th/0308158
- [170] A. Fabbri, D. Langlois, D. A. Steer és R. Zegers: *Brane cosmology with an anisotropic bulk*, *JHEP* **0409** 025 (2004), e-Print: hep-th/0407262
- [171] A. V. Frolov: *Kasner-AdS spacetime and anisotropic brane-world cosmology*, *Phys. Lett. B* **514** 213 (2001), e-Print: arXiv:gr-qc/0102064
- [172] J. Ehlers: *Beiträge zur relativistischen Mechanik kontinuierlicher Medien*, *Abh. Mainz Akad. Wiss. u. Litt. (Math. Nat. kl)* **11** 792 (1961)
- [173] G. F. R. Ellis és H. van Elst: *Cosmological models, Theoretical and Observational Cosmology-ban*, *NATO Adv. Study Inst. Ser. C. Math. Phys. Sci.* **541** 1, Lachiéze-Rey M, Kluwer szerkesztésében, Dordrecht (1999), e-print: arXiv:gr-qc/9812046
- [174] G. F. R. Ellis: *Cosmological models, Modern Cosmology* könyvben, S. Bonometto, V. Gorini, és U. Moschella szerkesztésében (IOP publishing Ltd, London) (2002)
- [175] C. A. Clarkson és R. K. Barrett: *Covariant Perturbations of Schwarzschild Black Holes*, *Class. Quant. Grav.* **20** 3855-3884 (2003), e-print: arXiv:gr-qc/0209051
- [176] C. Clarkson: *A covariant approach for perturbations of rotationally symmetric spacetimes*, *Phys. Rev. D* **76** 104034 (2007), e-print: arXiv:0708.1398
- [177] A. M. Nzioki, S. Carloni, R. Goswami és P. K. S. Dunsby: *A new framework for studying spherically symmetric static solutions in $f(R)$ gravity*, *Phys. Rev. D* **81** 084028 (2010), e-print: arXiv:0908.3333
- [178] H. van Elst és G. F. R. Ellis: *The Covariant Approach to LRS Perfect Fluid Spacetime Geometries*, *Class. Quantum Grav.* **13** 1099 (1996), e-print: arXiv:gr-qc/9510044
- [179] W. B. Bonnor: *A new interpretation of the NUT metric in general relativity*, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **66** 145 (1969)
- [180] C. W. Misner: *Taub-NUT space as a counterexample to almost anything*, *Relativity Theory and Astrophysics I: Relativity and Cosmology* könyvben, J. Ehlers szerkesztésében, *Lectures in Applied Mathematics* 8 (American Mathematical Society) 160 (1967)
- [181] M. Demianski és E. T. Newman: *A combined Kerr–NUT solution of the Einstein field equations*, *Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Math. Astron. Phys.* **XIV** 653 (1966)
- [182] D. Lynden–Bell és M. Nouri–Zonoz: *Classical monopoles: Newton, NUT space, gravomagnetic lensing, and atomic spectra*, *Rev. Mod. Phys.* **70** 427 (1998)

- [183] N. Dadhich, R. Maartens, P. Papadopoulos és V. Rezanía: *Black holes on the brane*, *Phys. Lett. B* **487** 1 (2000), e-print: arXiv:hep-th/0003061
- [184] A. N. Aliev és A. E. Gümrükçüoğlu: *Charged Rotating Black Holes on a 3-Brane*, *Phys. Rev. D* **71** 104027 (2005), e-print: arXiv:hep-th/0502223
- [185] Z. Keresztes és L. Á. Gergely: *On the validity of the 5-dimensional Birkhoff theorem: The tale of an exceptional case*, *Class. Quantum Grav.* **25** 165016 (2008), e-print: arXiv:0712.3758
- [186] A. S. Eddington, On the instability of Einstein's spherical world, *MNRAS* **90** 668 (1930)
- [187] J. D. Barrow, G. F. R. Ellis, R. Maartens és C. G. Tsagas: *On the Stability of the Einstein Static Universe*, *Class. Quantum Grav.* **20** L155 (2003), e-print: arXiv:gr-qc/0302094
- [188] K. A. Bronnikov és V. N. Melnikov: *The Birkhoff Theorem in Multidimensional Gravity*, *Gen. Rel. Grav.* **27** 465 (1995), e-print: arXiv:gr-qc/9403063
- [189] S. Mukohyama, T. Shiromizu és K. Maeda: *Global structure of exact cosmological solutions in the brane world*, *Phys. Rev. D* **62** 024028 (2000); Erratum-ibid. *Phys. Rev. D* **63** 029901 (2001), arXiv:hep-th/9912287
- [190] L. Á. Gergely és Z. Keresztes: *Irradiated asymmetric Friedmann branes*, *JCAP* **0601** 022 (2006), e-print: arXiv:hep-th/0601217
- [191] Z. Keresztes, I. Képiró és L. Á. Gergely: *Semi-transparent brane-worlds*, *JCAP* **0605** 020 (2006), e-print: arXiv:hep-th/0603223
- [192] D. Langlois, L. Sorbo és M. Rodríguez-Martínez: *Cosmology of a brane radiating gravitons into the extra dimension*, *Phys. Rev. Lett.* **89** 171301 (2002), e-print: arXiv:hep-th/0206146
- [193] L. Á. Gergely, E. Leeper és R. Maartens: *Asymmetric radiating brane-world*, *Phys. Rev. D* **70** 104025 (2004), e-print: arXiv:gr-qc/0408084
- [194] D. Jennings és I. R. Vernon: *Graviton emission into non-Z2 symmetric brane world spacetimes*, *JCAP* **0507** 011 (2005), e-print: arXiv:hep-th/0412083
- [195] D. Langlois: *Is our Universe brany?*, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **163** 258 (2006), e-print: arXiv:hep-th/0509231
- [196] P. Hajicek: *Origin of Hawking radiation*, *Phys. Rev. D* **36** 1065 (1987)
- [197] W. Biernacki: *Notes on the origin of Hawking radiation*, *Class. Quant. Grav.* **6** 1065 (1989)
- [198] D. Jennings, I. R. Vernon, A-C. Davis és C. van de Bruck: *Bulk black holes radiating in non-Z2 brane-world spacetimes*, *JCAP* **0504** 013 (2005), e-print: arXiv:hep-th/0412281
- [199] L. Á. Gergely: *Spherically symmetric static solution for colliding null dust*, *Phys. Rev. D* **58** 084030 (1998), e-print: arXiv:gr-qc/9809024
- [200] R. Emparan, G. T. Horowitz és R. C. Myers: *Black Holes Radiate Mainly on the Brane*, *Phys. Rev. Lett.* **85** 499 (2000), e-print: arXiv:hep-th/0003118
- [201] S. Hemming és E. Keski-Vakkuri: *Hawking radiation from AdS black holes*, *Phys. Rev. D* **64** 044006 (2001), e-print: arXiv:gr-qc/0005115
- [202] R. Guedens, D. Clancy és A. R. Liddle: *Primordial black holes in braneworld cosmologies: Formation, cosmological evolution and evaporation*, *Phys. Rev. D* **66** 043513 (2002), e-print: arXiv:astro-ph/0205149

- [203] K. Ichiki, M. Yahiro, T. Kajino, M. Orito és G. J. Mathews: *Observational Constraints on Dark Radiation in Brane Cosmology*, *Phys. Rev. D* **66** 043521 (2002), e-print: arXiv:astro-ph/0203272
- [204] Z. Keresztes, L. Á. Gergely, B. Nagy és Gy. M. Szabó: *The luminosity-redshift relation in brane-worlds: I. Analytical results*, *PMC Phys. A* **1** 4 (2007), e-print: arXiv:astro-ph/0606698
- [205] Gy. M. Szabó, L. Á. Gergely és Z. Keresztes: *The luminosity-redshift relation in brane-worlds: II. Confrontation with experimental data*, *PMC Phys. A* **1** 8 (2007), e-print: arXiv:astro-ph/0702610
- [206] S. Pal: *Structure formation on the brane: A mimicry*, *Phys. Rev. D* **74** 024005 (2006), e-print: arXiv:gr-qc/0606085
- [207] S. Pal: *Brane cosmology, Weyl fluid, and density perturbations*, *Phys. Rev. D* **78** 043517 (2008), e-print: arXiv:0806.2505
- [208] M. P. Dąbrowski, W. Godłowski és M. Szydlowski: *Brane universes tested against astronomical data*, *Int. J. Mod. Phys. D* **13** 1669 (2004), e-print: arXiv:astro-ph/0212100
- [209] S. Fay, *Branes: cosmological surprise and observational deception*, *Astron. Astrophys.* **452** 781 (2006), e-print: arXiv:gr-qc/0606076
- [210] P. F. Byrd és M. D. Friedman: *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York (1971)
- [211] D. N. Spergel, R. Bean, O. Doré, M. R. Nolta és tsai: *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Three Year Results: Implications for Cosmology*, *Astrophys. J. Suppl.* **170** 377 (2007), e-print: arXiv:astro-ph/0603449
- [212] Z. Keresztes, L. Á. Gergely, V. Gorini, U. Moschella és A. Yu. Kamenshchik: *Tachyon cosmology, supernovae data and the Big Brake singularity*, *Phys. Rev. D* **79** 083504 (2009), e-print: arXiv:0901.2292. Jelölési konverziók: $(k, w_0) \rightarrow (w, v_0)$
- [213] W. M. Wood-Vasey, G. Miknaitis, C. W. Stubbs, S. Jha és tsai [ESSENCE Collaboration]: *Observational Constraints on the Nature of the Dark Energy: First Cosmological Results from the ESSENCE Supernova Survey*, *Astrophys. J.* **666** 694 (2007), e-print: arXiv:astro-ph/0701041
- [214] D. A. Dicus és W. W. Repko: *Constraints on the dark energy equation of state from recent supernova data*, *Phys. Rev. D* **70** 083527 (2004), e-print: arXiv:astro-ph/0407094
- [215] A. Shafieloo, V. Sahni és A. A. Starobinsky: *Is cosmic acceleration slowing down?*, *Phys. Rev. D* **80** 101301 (R) (2009), e-print: arXiv:0903.5141
- [216] L. Fernández-Jambrina és Lazkoz: *Geodesic behavior of sudden future singularities*, *Phys. Rev. D* **70** 121503 (2004), e-print: arXiv:gr-qc/0410124
- [217] T. Padmanabhan: *Theoretical Astrophysics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge UK vol 3 p 168-171 (2002)
- [218] A. Doroshkevich, D. L. Tucker, S. Allam és M. J. Way: *Large scale structure in the SDSS galaxy survey*, *Astronomy and Astrophysics* **418** 7 (2004), e-print: arXiv:astro-ph/0307233
- [219] D. J. Eisenstein, I. Zehavi, D. W. Hogg, R. Scoccimarro és tsai: *Detection of the Baryon Acoustic Peak in the Large-Scale Correlation Function of SDSS Luminous Red Galaxies*, *Astrophys. J.* **633** 560 (2005), e-print: arXiv:astro-ph/0501171
- [220] A. Hajian és T. Souradeep: *The Cosmic Microwave Background Bipolar Power Spectrum: Basic Formalism and Applications* (2005) e-print: arXiv:astro-ph/0501001

- [221] C-P. Ma és E. Bertschinger: *Cosmological Perturbation Theory in the Synchronous and Conformal Newtonian Gauges*, *Astrophys. J.* **455** 7 (1995), e-print: arXiv:astro-ph/9506072
- [222] S. Dodelson: *Modern Cosmology*, *Academic Press* (2003)
- [223] R. Durrer: *The Cosmic Microwave Background*, *Cambridge Univ. Press* (2008)
- [224] D. N. Spergel, L. Verde, H. V. Peiris, E. Komatsu és tsai: *First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters*, *Astrophys. J. Suppl.* **148** 175 (2003), e-print: arXiv:astro-ph/0302209
- [225] D. R. Brill: *Splitting of an extremal Reissner-Nordström throat via quantum tunneling*, *Phys. Rev. D* **46** 1560 (1992)
- [226] B. Bertotti: *Uniform Electromagnetic Field in the Theory of General Relativity*, *Phys. Rev.* **116** 1331 (1959)
- [227] I. Robinson: *A solution of the Einstein-Maxwell equation*, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Mat. Fis. Astr.* **7** 351 (1959)
- [228] J. L. Tonry, B. P. Schmidt, B. Barris, P. Candia és tsai: *Cosmological Results from High- z Supernovae*, *Astrophys. J.* **594** 1 (2003), e-print: arXiv:astro-ph/0305008
- [229] A. G. Riess, L-G. Strolger, S. Casertano, H. C. Ferguson és tsai: *New Hubble Space Telescope Discoveries of Type Ia Supernovae at $z > 1$: Narrowing Constraints on the Early Behavior of Dark Energy*, *Astrophys. J.* **659** 98 (2007), e-print: arXiv:astro-ph/0611572
- [230] M. Tegmark, M. A. Strauss, M. R. Blanton, K. Abazajian és tsai: *Cosmological parameters from SDSS and WMAP*, *Phys. Rev. D* **69** 103501 (2004), e-print: arXiv:astro-ph/0310723
- [231] J. Garcia-Bellido: *Cosmology and Astrophysics*, (2005), e-print: arXiv:astro-ph/0502139
- [232] E. W. Kolb és M. S. Turner: *The Early Universe*, *Adisson Wesley* (1990)

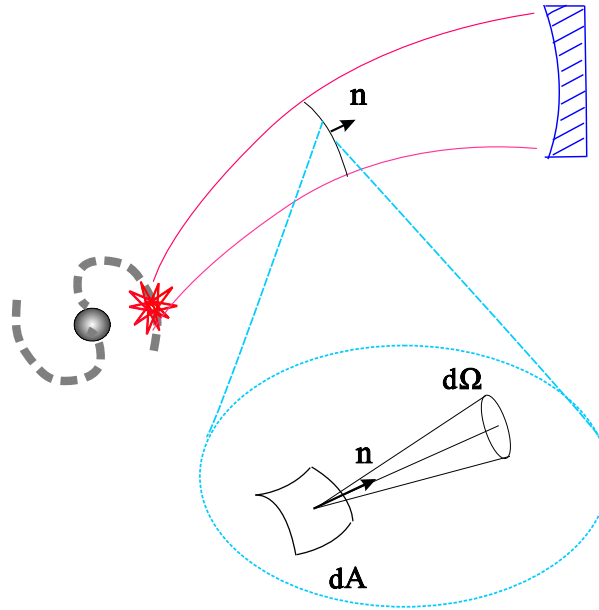
A. függelék

A luminozítás-vörösetolódás reláció

Egy asztrofizikai fényforrás emittálta, szórámentesen haladó foton-nyaláb esetén, a 6-dimenziós fázis tér (\vec{x}, \vec{p}) elemi együttmozgó térfogatában a dN_γ foton szám megmarad [217]. Emiatt a nyaláb foton számsűrűsége

$$f_\gamma(t, \vec{x}, \vec{p}) \equiv \frac{dN_\gamma}{d^3\vec{x}d^3\vec{p}} = \frac{dN_\gamma}{\hbar^3\omega^2 d\tau dA d\omega d\Omega} \quad (\text{A.1})$$

időben konstans. Itt felhasználásra került, hogy $d^3\vec{x} = d\tau dA$ és $d^3\vec{p} = \hbar^3\omega^2 d\omega d\Omega$, ahol ω jelöli a fotonok frekvenciáját, dA és $d\Omega$ a nyaláb haladási irányára merőleges elemi felszín és a haladási irány körüli elemi térszöget jelenti (lásd A.1. ábrát). Az (A.1) egyenlet a kozmológiai evolúció bármely típusára teljesül. A forrás *luminozitása*: $\mathcal{L} = dE_{em}/dt_{em}$ (az időegység alatt emittált teljes energia).



A.1. ábra. A teleszkóp tükrén keresztül megfigyelt, a távoli galaxisban felrobbanó szupernóva emittálta fény görbült téridőben való haladásának sematikus ábrázolása. A fény terjedésének irányát \mathbf{n} , az erre merőleges elemi felület felszín dA és az \mathbf{n} körüli elemi térszöget $d\Omega$ jelöli. (Az ábráért köszönet Gergely Árpád Lászlónak).

Egy teleszkóp detektálta *foton fluxus* $\mathcal{F} = dE_{rec}/d\tau_{rec}/A_M$ (ahol *rec* jelölés a detektálásra vonatkozik). Ez az időegység alatt, a teleszkóp beeső fényre merőleges A_M felületén detektált

energia. Az \mathcal{F} , és \mathcal{L} definícióiból könnyen kapcsolatot teremthetünk a két mennyiség között:

$$\frac{\mathcal{F} A_M}{\mathcal{L}} = \frac{dE_{rec}/d\tau_{rec}}{dE_{em}/d\tau_{em}}. \quad (\text{A.2})$$

Mivel a fotonáram energiája az együtt mozgó elemi fázis-térfogatban: $dE = \hbar\omega dN_\gamma$, az (A.1) egyenletből következik:

$$\frac{dE_{rec}}{dE_{em}} = \frac{A_M}{A_{tot}} \left(\frac{\omega_{rec}}{\omega_{em}} \right)^3 \frac{d\omega_{rec}}{d\omega_{em}} \frac{dA_{rec}}{dA_{em}} \frac{d\tau_{rec}}{d\tau_{em}}. \quad (\text{A.3})$$

Itt felhasználásra került, hogy az FLRW univerzum izotrópiájából következik $d\Omega_{rec} = d\Omega_{em}$, és történt egy integrálás a tükör felületét körül ölelő térszögre, egy másik pedig a teljes térszögre az E_{rec} és E_{em} definícióinak megfelelően. Az (A.3) egyenletben A_{tot} annak a gömb felületének a felszíne a detektálás időpontjában, amelynek középpontját a fényforrás jelöli ki és amelynek felszíne tartalmazza a detektálás helyét.

A kozmológiai időfejlődés miatt a dA elemi felület a^2 -el változik, amíg a fény frekvenciája $\omega \propto 1/a$ a vöröseltolódás miatt [217]. A $d\omega$ együtt mozgó elemi fázis-térfogat kozmológiai evolúciója: $d\omega \propto 1/a$. Ezért

$$\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{L}} = \frac{1}{A_{tot}} \left(\frac{a}{a_0} \right)^2, \quad (\text{A.4})$$

ahol a_0 a skálafaktor jelenlegi értéke, amíg a a skálafaktor értéke az emissziókor. FLRW univerzumban az r_{em} együtt mozgó sugarú gömb teljes felülete: $A_{tot} = 4\pi a_0^2 r_{em}^2$. A z vöröseltolódás definíciója:

$$1 + z = \frac{a_0}{a_{em}}. \quad (\text{A.5})$$

A d_L luminozítás távolság:

$$d_L(z) := \left(\frac{\mathcal{L}}{4\pi\mathcal{F}} \right)^{1/2} = a_0 r_{em} (1 + z). \quad (\text{A.6})$$

Ez az egyenlőség helyes, amíg (homogén és izotróp) FLRW univerzumot vizsgálunk (tekintet nélkül a görbületi index értékére), és a gömb felszínét a fizikai távolságban (ar) mérjük (az FLRW metrika (1.1) garantálja, hogy az ar sugarú gömb felülete $4\pi a^2 r^2$).

Az (1.2) egyenlet szerint az r_{em} együtt mozgó koordináta kifejezhető a másik együtt mozgó radiális koordináta χ_{em} segítségével:

$$d_L(z) \equiv a_0 (1 + z) \mathcal{H}(\chi_{em}; k). \quad (\text{A.7})$$

Eltekintve az FLRW téridő perturbációi okozta lehetséges fényelhajlástól, egy fénysugár az FLRW metrika radiális null geodetikusait követi, amit a $d\chi = d\tau/a(\tau) = da/a^2 H$ egyenlet ad. Ekkor

$$\chi_{em} = \chi(a_{em}) = \int_{a_{em}}^{a_0} \frac{da}{a\dot{a}} = \int_{a_{em}}^{a_0} \frac{da}{a^2 H(a)}. \quad (\text{A.8})$$

Az (A.5) egyenletet alkalmazva, a χ radiális változó kifejezhető a vöröseltolódás szerinti integrállal:

$$\chi_{em}(z) = \frac{1}{a_0} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (\text{A.9})$$

Differenciálva (A.7) egyenletet z szerint, kapjuk

$$\frac{1}{H(z)} = \left[1 - \frac{k d_L^2(z)}{a_0^2 (1 + z)^2} \right]^{-1/2} \frac{d}{dz} \left[\frac{d_L(z)}{1 + z} \right], \quad (\text{A.10})$$

ezért, ha a fényforrásoknak egy halmazára d_L és z független mérései rendelkezésre állnak, a $H(z)$ Hubble paraméter és ennek következményeként a kozmológiai dinamika meghatározható.

Az univerzum nagy skálájú struktúrájának [218], [219] és a kozmikus mikrohullámú háttér-sugárzás (CMB; cosmic microwave background) [230] kombinált méréseiből az a következtetés vonható le, hogy a térbeli geometria sík. Ekkor a luminozítás távolság-vöröseltolódás reláció:

$$d_L(z) = (1 + z) \int_0^z \frac{dz^*}{H(z^*)} . \quad (\text{A.11})$$

Mindegyik kozmológiai modellnek megvan a saját jóslata $d_L(z)$ alakjára [lásd (A.7) és (A.9) egyenleteket általános k -ra, vagy (A.11) egyenletet $k = 0$ esetén]. Így a mért $d_L(z)$ kozmológiai tesztként szolgál. A levezetésben annyit használtam ki, hogy a fotonok térbelileg homogén és izotróp négydimenziós téridőben terjednek.

B. függelék

3+1+1 gravitációs dinamika mellékletei

B.1. Kommutációs relációk

Ebben a mellékletben néhány hasznos differenciális azonosságot sorolok fel, amelyek az $u^a \tilde{\nabla}_a \equiv D/d\tau$ (pont), $n^a \tilde{\nabla}_a \equiv D/dy$ (vessző) és D_a (3d kovariáns derivált) deriváltak kommutátorainak skalárokon, 3-vektorokon és szimmetrikus spurmentes 3-tenzorokon való hatásaiból származnak.

A ϕ skalármezőkön a következő kommutációs relációk érvényesek:

$$n^a \tilde{\nabla}_a (\dot{\phi}) - u^c \tilde{\nabla}_c (\phi') = K\phi' + \hat{K}\dot{\phi} + (K^a - \hat{K}^a) D_a \phi, \quad (\text{B.1})$$

$$D_a \phi' - h_a^i n^b \tilde{\nabla}_b (D_i \phi) = -(K_a - L_a) \dot{\phi} + \hat{A}_a \phi' + \frac{\hat{\Theta}}{3} D_a \phi + (\hat{\omega}_{ab} + \hat{\sigma}_{ab}) D^b \phi, \quad (\text{B.2})$$

$$D_a \dot{\phi} - h_a^i u^b \tilde{\nabla}_b (D_i \phi) = -A_a \dot{\phi} + (\hat{K}_a + L_a) \phi' + \frac{\Theta}{3} D_a \phi + (\omega_{ab} + \sigma_{ab}) D^b \phi, \quad (\text{B.3})$$

$$D_{[a} D_{b]} \phi = \omega_{ab} \dot{\phi} - \hat{\omega}_{ab} \phi'. \quad (\text{B.4})$$

A V^a 3-vektormezőkön az alábbi kommutációs relációk érvényesek:

$$\begin{aligned} h_b^j n^a \tilde{\nabla}_a (\dot{V}_{\langle j \rangle}) - h_b^j u^c \tilde{\nabla}_c (V'_{\langle j \rangle}) &= -\varepsilon_{kab} \mathcal{H}^a V^b + K V'_{\langle b \rangle} + \hat{K} \dot{V}_{\langle b \rangle} + (K^a - \hat{K}^a) D_a V_b \\ &\quad - A_a V^a K_b + \hat{K}_a V^a \hat{A}_b + K_a V^a A_b - \hat{A}_a V^a \hat{K}_b, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

$$\begin{aligned} &h_c^i h_d^j u^a \tilde{\nabla}_a (D_i V_j) - D_c (\dot{V}_{\langle d \rangle}) \\ &= -(\hat{K}_c + L_c) V'_{\langle d \rangle} + A_c \dot{V}_{\langle d \rangle} - \frac{\Theta}{3} D_c V_d + \frac{\hat{\Theta}}{3} \hat{K}_d V_c - \frac{\Theta}{3} A_d V_c + \frac{1}{2} \hat{\mathcal{E}}_a V^a h_{cd} - \frac{1}{2} \hat{\mathcal{E}}_d V_c \\ &\quad - (\sigma_{ac} - \omega_{ac}) D^a V_d - \varepsilon_{dab} \mathcal{H}_c^b V^a + \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} \tilde{q}_a V^a h_{cd} - \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} V_c \tilde{q}_d - \left(\frac{\hat{\Theta}}{3} h_{cd} + \hat{\omega}_{cd} + \hat{\sigma}_{cd} \right) \hat{K}_a V^a \\ &\quad + \hat{K}_d (\hat{\omega}_{ca} + \hat{\sigma}_{ca}) V^a + \left(\frac{\Theta}{3} h_{cd} + \omega_{cd} + \sigma_{cd} \right) A_a V^a - A_d (\omega_{ca} + \sigma_{ca}) V^a, \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned} &h_c^i h_d^j n^a \tilde{\nabla}_a (D_i V_j) - D_c (V'_{\langle d \rangle}) \\ &= -(L_c - K_c) \dot{V}_{\langle d \rangle} - \hat{A}_c V'_{\langle d \rangle} - \frac{\hat{\Theta}}{3} D_c V_d - \frac{\Theta}{3} K_d V_c + \frac{\hat{\Theta}}{3} \hat{A}_d V_c - \frac{1}{2} \mathcal{E}_a V^a h_{cd} + \frac{1}{2} \mathcal{E}_d V_c \\ &\quad - (\hat{\sigma}_{ac} - \hat{\omega}_{ac}) D^a V_d - \varepsilon_{dab} \hat{\mathcal{H}}_c^b V^a - \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} \tilde{\pi}_a V^a h_{cd} + \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} V_c \tilde{\pi}_d + \left(\frac{\Theta}{3} h_{cd} + \omega_{cd} + \sigma_{cd} \right) K_a V^a \end{aligned}$$

$$-K_d (\omega_{ca} + \sigma_{ca}) V^a - \left(\frac{\hat{\Theta}}{3} h_{cd} + \hat{\omega}_{cd} + \hat{\sigma}_{cd} \right) \hat{A}_a V^a + \hat{A}_d (\hat{\omega}_{ca} + \hat{\sigma}_{ca}) V^a , \quad (\text{B.7})$$

$$\begin{aligned} D_{[a} D_{b]} V_c &= \omega_{ab} \dot{V}_{\langle c \rangle} - \hat{\omega}_{ab} V'_{\langle c \rangle} + h_{c[a} \mathcal{E}_{b]d} V^d + \mathcal{E}_{c[a} V_{b]} - h_{c[a} \hat{\mathcal{E}}_{b]d} V^d - \hat{\mathcal{E}}_{c[a} V_{b]} \\ &\quad - \frac{1}{9} (\Theta^2 - \hat{\Theta}^2) h_{c[a} V_{b]} - \frac{\Theta}{3} (\sigma_{c[a} - \omega_{c[a} V_{b]} + \frac{\hat{\Theta}}{3} (\hat{\sigma}_{c[a} - \hat{\omega}_{c[a} V_{b]} \\ &\quad - \frac{\Theta}{3} h_{c[a} (\sigma_{b]d} + \omega_{b]d}) V^d + \frac{\hat{\Theta}}{3} h_{c[a} (\hat{\sigma}_{b]d} + \hat{\omega}_{b]d}) V^d - \frac{1}{3} \mathcal{E} h_{c[a} V_{b]} \\ &\quad - (\sigma_{c[a} - \omega_{c[a} (\omega_{b]d} + \sigma_{b]d}) V^d + (\hat{\sigma}_{c[a} - \hat{\omega}_{c[a} (\hat{\omega}_{b]d} + \hat{\sigma}_{b]d}) V^d \\ &\quad + \frac{\tilde{\Lambda}}{6} h_{c[a} V_{b]} + \frac{\tilde{\kappa}^2}{6} (\tilde{\rho} - \tilde{\pi} + \tilde{p}) h_{c[a} V_{b]} + \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} h_{c[a} \tilde{\pi}_{b]d} V^d + \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} \tilde{\pi}_{c[a} V_{b]} . \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

A T_{ab} szimmetrikus spur mentes 3-tenzorokon érvényes kommutációs relációk pedig:

$$\begin{aligned} &h_{\langle c}^i h_{d \rangle}^j n^a \tilde{\nabla}_a (\dot{T}_{ij}) - h_{\langle c}^i h_{d \rangle}^j u^b \tilde{\nabla}_b (T'_{ij}) \\ &= K T'_{\langle cd \rangle} + \hat{K} \dot{T}_{\langle cd \rangle} + K^a D_a T_{cd} - \hat{K}^a D_a T_{cd} - 2K_{\langle c} T_{d \rangle a} A^a \\ &\quad + 2\hat{A}_{\langle c} T_{d \rangle a} \hat{K}^a + 2A_{\langle c} T_{d \rangle a} K^a - 2\hat{K}_{\langle c} T_{d \rangle a} \hat{A}^a - 2\varepsilon_{ab\langle d} T_{c \rangle}{}^a \mathcal{H}^b , \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{aligned} &h_a^k h_{\langle b}^i h_{c \rangle}^j n^d \tilde{\nabla}_d (D_k T_{ij}) - D_a (T'_{\langle bc \rangle}) \\ &= - (L_a - K_a) \dot{T}_{\langle bc \rangle} - \hat{A}_a T'_{\langle bc \rangle} - \frac{\hat{\Theta}}{3} D_d T_{bc} + \mathcal{E}_{\langle b} T_{c \rangle a} - (\hat{\omega}_{ad} + \hat{\sigma}_{ad}) D^d T_{bc} \\ &\quad - 2T_{\langle b}{}^d \varepsilon_{c \rangle di} \hat{\mathcal{H}}_a^i - h_{a\langle b} T_{c \rangle}{}^d \mathcal{E}_d + \frac{2\Theta}{3} h_{a\langle b} T_{c \rangle}{}^d K^d + \frac{2\hat{\Theta}}{3} \hat{A}_{\langle b} T_{c \rangle a} - \frac{2\hat{\Theta}}{3} h_{a\langle b} T_{c \rangle}{}^d \hat{A}^d \\ &\quad - 2(\omega_{ad} + \sigma_{ad}) K_{\langle b} T_{c \rangle}{}^d + 2(\hat{\omega}_{ad} + \hat{\sigma}_{ad}) \hat{A}_{\langle b} T_{c \rangle}{}^d + 2(\omega_{a\langle b} + \sigma_{a\langle b} T_{c \rangle}{}^d K^d \\ &\quad - 2(\hat{\omega}_{a\langle b} + \hat{\sigma}_{a\langle b} T_{c \rangle}{}^d \hat{A}^d - \frac{2\Theta}{3} K_{\langle b} T_{c \rangle a} - \frac{2\tilde{\kappa}^2}{3} h_{a\langle b} T_{c \rangle}{}^d \tilde{\pi}_d + \frac{2\tilde{\kappa}^2}{3} \tilde{\pi}_{\langle b} T_{c \rangle a} , \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

$$\begin{aligned} &h_a^k h_{\langle b}^i h_{c \rangle}^j u^d \tilde{\nabla}_d (D_k T_{ij}) - D_a (\dot{T}_{\langle bc \rangle}) \\ &= - (\hat{K}_a + L_a) T'_{\langle bc \rangle} + A_a \dot{T}_{\langle bc \rangle} - \frac{\Theta}{3} D_d T_{bc} - \hat{\mathcal{E}}_{\langle b} T_{c \rangle a} - (\omega_{ad} + \sigma_{ad}) D^d T_{bc} \\ &\quad - 2T_{\langle b}{}^d \varepsilon_{c \rangle di} \mathcal{H}_a^i + h_{a\langle b} T_{c \rangle}{}^d \hat{\mathcal{E}}_d - \frac{2\hat{\Theta}}{3} h_{a\langle b} T_{c \rangle}{}^d \hat{K}^d + \frac{2\hat{\Theta}}{3} \hat{K}_{\langle b} T_{c \rangle a} - \frac{2\Theta}{3} A_{\langle b} T_{c \rangle a} \\ &\quad + 2(\hat{\omega}_{ad} + \hat{\sigma}_{ad}) \hat{K}_{\langle b} T_{c \rangle}{}^d - 2(\omega_{ad} + \sigma_{ad}) A_{\langle b} T_{c \rangle}{}^d - 2(\hat{\omega}_{a\langle b} + \hat{\sigma}_{a\langle b} T_{c \rangle}{}^d \hat{K}^d \\ &\quad + 2(\omega_{a\langle b} + \sigma_{a\langle b} T_{c \rangle}{}^d A^d + \frac{2\Theta}{3} h_{a\langle b} T_{c \rangle}{}^d A^d + \frac{2\tilde{\kappa}^2}{3} h_{a\langle b} T_{c \rangle}{}^d \tilde{q}_d - \frac{2\tilde{\kappa}^2}{3} \tilde{q}_{\langle b} T_{c \rangle a} . \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

B.2. Infinitézimális bázis transzformációk

Egy infinitezimális transzformáció az (u^a, n^a) diádról az (\bar{u}^a, \bar{n}^a) diádra a megfelelő általános relativitáselméleti eljárás [161] általánosításaként a következőképpen definiálható:

$$\bar{u}_a = u_a + v_a + \nu n_a , \text{ ahol } u^a v_a = n^a v_a = 0 , \quad (\text{B.12})$$

$$\bar{n}_a = n_a + l_a + m u_a , \text{ ahol } u^a l_a = n^a l_a = 0 . \quad (\text{B.13})$$

Itt v_a, l_a, ν, m mindegyike kis $\mathcal{O}(1)$ mennyiség.¹ Az új diád eleget tesz

$$\bar{u}^a \bar{u}_a = -1, \quad \bar{n}^a \bar{n}_a = 1, \quad \bar{u}^a \bar{n}_a = 0, \quad (\text{B.14})$$

kifejezéseknek, amelyek adják

$$\nu = m. \quad (\text{B.15})$$

Amikor $v_a = l_a = 0$ a fenti paraméterek egy infinitezimális ortogonális transzformációt definiálnak (ez egy 2-dimenziós infinitezimális Lorentz boost). A v_a és l_a paraméterek infinitezimális translációt adnak. Ezek a transzformációk mérték szabadsági fokokat jelentenek.

A fundamentális algebrai tenzorok h_{ab} és ε_{abc} a következőképpen változnak:

$$\bar{h}_{ab} = h_{ab} + 2u_{(a}v_{b)} - 2n_{(a}l_{b)}, \quad (\text{B.16})$$

$$\bar{\varepsilon}_{abc} = \varepsilon_{abc} - (n_c \varepsilon_{abe} l^e + 2n_{[a} \varepsilon_{b]ce}) l^e + (u_c \varepsilon_{abd} + 2u_{[a} \varepsilon_{b]cd}) v^d. \quad (\text{B.17})$$

Az új 3-metrika kielégíti a $\bar{h}_{ab} \bar{n}^a = \bar{h}_{ab} \bar{u}^a = 0$ feltételeket.

Az új diád vektorok kovariáns deriváltjainak felbontása:

$$\tilde{\nabla}_a \bar{u}_b = -\bar{u}_a \bar{A}_b + \bar{K} \bar{u}_a \bar{n}_b + \bar{K} \bar{n}_a \bar{n}_b + \bar{n}_a \bar{K}_b + \bar{L}_a \bar{n}_b + \frac{\bar{\Theta}}{3} \bar{h}_{ab} + \bar{\omega}_{ab} + \bar{\sigma}_{ab}, \quad (\text{B.18})$$

$$\tilde{\nabla}_a \bar{n}_b = \bar{n}_a \bar{A}_b + \bar{K} \bar{n}_a \bar{u}_b + \bar{K} \bar{u}_a \bar{u}_b - \bar{u}_a \bar{K}_b + \bar{L}_a \bar{u}_b + \frac{\bar{\Theta}}{3} \bar{h}_{ab} + \bar{\omega}_{ab} + \bar{\sigma}_{ab}, \quad (\text{B.19})$$

amely a kinematikai mennyiségek alábbi transzformációs törvényeit eredményezi:

$$\bar{K} = K - \hat{A}_a v^a + (K_a + L_a) l^a - m \hat{K} + m', \quad (\text{B.20})$$

$$\bar{\hat{K}} = \hat{K} - A_a l^a + (\hat{K}_a - L_a) v^a - m K - \dot{m}, \quad (\text{B.21})$$

$$\bar{\hat{\Theta}} = \hat{\Theta} + m \Theta + D^a l_a - l^a \hat{A}_a - v^a (L_a - \hat{K}_a), \quad (\text{B.22})$$

$$\bar{\Theta} = \Theta + m \hat{\Theta} + D^a v_a + v^a A_a - l^a (K_a + L_a), \quad (\text{B.23})$$

$$\bar{A}_c = A_c + v^b A_b u_c + \hat{K} l_c - l^b A_b n_c + \frac{\Theta}{3} v_c + (\omega_{ac} + \sigma_{ac}) v^a + m (K_c + \hat{K}_c) + \dot{v}_{\langle c \rangle}, \quad (\text{B.24})$$

$$\bar{\hat{A}}_c = \hat{A}_c - l^b \hat{A}_b n_c - K v_c + v^b \hat{A}_b u_c + \frac{\hat{\Theta}}{3} l_c + (\hat{\omega}_{ac} + \hat{\sigma}_{ac}) l^a + m (K_c + \hat{K}_c) + l'_{\langle c \rangle}, \quad (\text{B.25})$$

$$\bar{K}_c = K_c - K l_c + u_c v^b K_b - n_c l^b K_b + \frac{\Theta}{3} l_c + (\sigma_{ac} + \omega_{ac}) l^a + m (A_c + \hat{A}_c) + v'_{\langle c \rangle}, \quad (\text{B.26})$$

$$\bar{\hat{K}}_c = \hat{K}_c + \hat{K} v_c - n_c l^b \hat{K}_b + u_c v^b \hat{K}_b + \frac{\hat{\Theta}}{3} v_c + (\hat{\sigma}_{ac} + \hat{\omega}_{ac}) v^a + m (A_c + \hat{A}_c) + \dot{l}_{\langle c \rangle}, \quad (\text{B.27})$$

$$\begin{aligned} \bar{L}_c &= L_c - \hat{K} v_c - K l_c + u_c v^a L_a - n_c l^a L_a - \frac{\hat{\Theta}}{3} v_c \\ &\quad + \frac{\Theta}{3} l_c + D_c m - (\hat{\sigma}_{cb} + \hat{\omega}_{cb}) v^b + (\sigma_{ca} + \omega_{ca}) l^a, \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

$$\bar{\hat{\sigma}}_{cd} = \hat{\sigma}_{cd} + m \sigma_{cd} + D_{\langle c} l_{d \rangle} + v_{\langle c} (\hat{K}_{d \rangle} - L_{d \rangle}) - l_{\langle c} \hat{A}_{d \rangle} + 2v^a \hat{\sigma}_{a(d} u_{c \rangle} - 2l^a \hat{\sigma}_{a(d} n_{c \rangle}, \quad (\text{B.29})$$

$$\bar{\sigma}_{cd} = \sigma_{cd} + m \hat{\sigma}_{cd} + D_{\langle c} v_{d \rangle} - l_{\langle c} (K_{d \rangle} + L_{d \rangle}) + v_{\langle c} A_{d \rangle} - 2l^a \sigma_{a(d} n_{c \rangle} + 2v^a \sigma_{a(d} u_{c \rangle}, \quad (\text{B.30})$$

$$\bar{\hat{\omega}}_{cd} = \hat{\omega}_{cd} + m \omega_{cd} + D_{[c} l_{d]} + v_{[c} (\hat{K}_{d]} - L_{d]}) - l_{[c} \hat{A}_{d]} + 2v^a \hat{\omega}_{a[d} u_{c]} - 2l^a \hat{\omega}_{a[d} n_{c]}, \quad (\text{B.31})$$

¹A $\mathcal{O}(1)$ mennyiségek mindegyike eltűnik az identikus transzformációra. Az identikus transzformációtól csak kissé térnek el, így $\mathcal{O}(2) = \mathcal{O}(1)^2$ mennyiségeket eldobom.

$$\bar{\omega}_{cd} = \omega_{cd} + m\hat{\omega}_{cd} + D_{[c}v_{d]} - l_{[c}(K_{d]} + L_{d]} + v_{[c}A_{d]} - 2l^a\omega_{a[d}n_{c]} + 2v^a\omega_{a[d}u_{c]} . \quad (\text{B.32})$$

Hasonlóan, a gravito–elektro–mágneses mennyiségek transzformációi:

$$\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{E} + 2\mathcal{E}_a l^a + 2\hat{\mathcal{E}}_a l^a , \quad (\text{B.33})$$

$$\bar{\mathcal{E}}_k = \mathcal{E}_k - m\hat{\mathcal{E}}_k - \frac{4}{3}\mathcal{E}l_k + \mathcal{E}_a v^a u_k - \mathcal{E}_a l^a n_k + \varepsilon_{kab}\mathcal{H}^a v^b + \mathcal{E}_{ka}l^a - \mathcal{F}_{ka}v^a , \quad (\text{B.34})$$

$$\bar{\hat{\mathcal{E}}}_k = \hat{\mathcal{E}}_k - m\mathcal{E}_k + \frac{4}{3}\mathcal{E}v_k - \hat{\mathcal{E}}_a l^a n_k + \hat{\mathcal{E}}_a v^a u_k - \varepsilon_{kab}\mathcal{H}^a l^b + \hat{\mathcal{E}}_{ka}v^a - \mathcal{F}_{ka}l^a , \quad (\text{B.35})$$

$$\bar{\mathcal{H}}_k = \mathcal{H}_k - \frac{\varepsilon_k^{ab}}{2}\hat{\mathcal{E}}_a l_b - \frac{\varepsilon_k^{ab}}{2}\mathcal{E}_a v_b - n_k \mathcal{H}_a l^a + u_k \mathcal{H}_a v^a - \varepsilon_k^{ab}\mathcal{E}_a v_b + \hat{\mathcal{H}}_{ka}v^a - \mathcal{H}_{ka}l^a , \quad (\text{B.36})$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{F}}_{kl} = & \mathcal{F}_{kl} + 2u_{(k}\mathcal{F}_{l)a}v^a - 2n_{(k}\mathcal{F}_{l)a}l^a - \frac{3}{2}\mathcal{E}_{(k}v_{l)} \\ & + \frac{3}{2}\hat{\mathcal{E}}_{(k}l_{l)} + m\hat{\mathcal{E}}_{kl} + m\mathcal{E}_{kl} - \varepsilon_{ab(k}\hat{\mathcal{H}}_{l)}^a v^b - \varepsilon_{ab(k}\mathcal{H}_{l)}^a l^b , \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

$$\bar{\hat{\mathcal{E}}}_{kl} = \hat{\mathcal{E}}_{kl} + 2m\mathcal{F}_{kl} + 2v_{(k}\hat{\mathcal{E}}_{l)} - \mathcal{E}_{(k}l_{l)} + 2u_{(k}\hat{\mathcal{E}}_{l)a}v^a - 2n_{(k}\hat{\mathcal{E}}_{l)a}l^a - 2\varepsilon_{ab(k}\hat{\mathcal{H}}_{l)}^a l^b , \quad (\text{B.38})$$

$$\bar{\mathcal{E}}_{kl} = \mathcal{E}_{kl} + 2m\mathcal{F}_{kl} - 2l_{(k}\mathcal{E}_{l)} + \hat{\mathcal{E}}_{(k}v_{l)} + 2u_{(k}\mathcal{E}_{l)a}v^a - 2n_{(k}\mathcal{E}_{l)a}l^a - 2\varepsilon_{ab(k}\mathcal{H}_{l)}^a v^b , \quad (\text{B.39})$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{H}}_{kl} = & \mathcal{H}_{kl} + m\hat{\mathcal{H}}_{kl} + \frac{3}{2}\mathcal{H}_{(k}l_{l)} - \varepsilon_{(k}^{ab}\mathcal{F}_{l)a}l_b + 2\varepsilon_{(k}^{ab}\mathcal{E}_{l)a}v_b \\ & - \varepsilon_{(k}^{ab}\hat{\mathcal{E}}_{l)a}v_b - 2n_{(k}\mathcal{H}_{l)a}l^a + 2u_{(k}\mathcal{H}_{l)a}v^a , \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

$$\begin{aligned} \bar{\hat{\mathcal{H}}}_{kl} = & \hat{\mathcal{H}}_{kl} + m\mathcal{H}_{kl} + \frac{3}{2}\mathcal{H}_{(k}v_{l)} + \varepsilon_{(k}^{ab}\mathcal{F}_{l)a}v_b - 2\varepsilon_{(k}^{ab}\hat{\mathcal{E}}_{l)a}l_b \\ & + \varepsilon_{(k}^{ab}\mathcal{E}_{l)a}l_b + 2u_{(k}\hat{\mathcal{H}}_{l)a}v^a - 2n_{(k}\hat{\mathcal{H}}_{l)a}l^a . \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

Az anyagi változók transzformációi:

$$\bar{\tilde{\rho}} = \tilde{\rho} - 2v^a\tilde{q}_a - 2m\tilde{q} , \quad (\text{B.42})$$

$$\bar{\tilde{\pi}} = \tilde{\pi} + 2l^a\tilde{\pi}_a - 2m\tilde{q} , \quad (\text{B.43})$$

$$\bar{\tilde{p}} = \tilde{p} - \frac{2}{3}v^a\tilde{q}_a - \frac{2}{3}l^a\tilde{\pi}_a , \quad (\text{B.44})$$

$$\bar{\tilde{q}} = \tilde{q} + l^a\tilde{q}_a - v^a\tilde{\pi}_a - m(\tilde{\rho} + \tilde{\pi}) , \quad (\text{B.45})$$

$$\bar{\tilde{q}}_a = \tilde{q}_a - \tilde{\rho}v_a - \tilde{q}l_a - 2\tilde{p}v_a - 2\tilde{\pi}_{ab}v^b + u_av^c\tilde{q}_c - n_al^c\tilde{q}_c - m\tilde{\pi}_a , \quad (\text{B.46})$$

$$\bar{\tilde{\pi}}_a = \tilde{\pi}_a - \tilde{q}v_a + 2\tilde{p}l_a - \tilde{\pi}l_a + 2\tilde{\pi}_{ab}l^b - n_al^c\tilde{\pi}_c + u_av^c\tilde{\pi}_c - m\tilde{q}_a , \quad (\text{B.47})$$

$$\bar{\tilde{\pi}}_{ab} = \pi_{ab} + 2\tilde{p}v_{(a}u_{b)} - 2\tilde{p}l_{(a}n_{b)} - 2\tilde{q}_{(a}v_{b)} + 2\pi_{(a}^d u_{b)}v_d - 2\pi_{(a}^c n_{b)}l_c - 2\tilde{\pi}_{(a}l_{b)} . \quad (\text{B.48})$$

Ellenőriztem, hogy az $l^a = 0 = m$ esetben a brán szimmetrikus beágyazására a \hat{K} , $\hat{\Theta}$, $L_a = -\hat{K}_a$ és $\hat{\sigma}_{ab}$ mennyiségeket eliminálva a (2.74)–(2.77) Lanczos egyenletek felhasználásával, és eldobva a többi brán normálisával kapcsolatos mennyiséget, a bránon visszakapjuk az általános relativitáselméletben fellépő kinematikai (Θ , σ_{ab} , ω_{ab} , A_a) és anyagi (ρ , p , q_a , π_{ab}) változók transzformációs szabályait [161] infinitezimális bázis változtatásra. Hasonlóan, felhasználva a (2.15) és (2.16) egyenleteket, megkapható a releváns 4d Weyl tenzor (E_{ab} , H_{ab}) projekcióinak transzformációi.

A mellékletben származtatott transzformációs törvények alkalmazása során ki kell róni az $l^a = 0 = m$ -át a bránon (azért, hogy n^a továbbra is merőleges legyen bránra), de ezen mennyiségek bránra merőleges irányú derváltjai (amit vessző jelöl) különbözhetnek nullától még a brán mentén is.

B.3. Gravitációs evolúciós és kényszer egyenletek egy aszimmetrikusa beágyazott brán mentén

A gravitációs dinamikát brán mentén leíró RS2 egyenletek:

$$0 = \dot{\hat{\Theta}} - D^a \hat{K}_a + \left(\hat{K} + \frac{\hat{\Theta}}{3} \right) \Theta - 2\hat{K}^a A_a + \hat{\sigma}_{ab} \sigma^{ab} - \tilde{\kappa}^2 \tilde{q} , \quad (\text{B.49})$$

$$0 = \dot{\hat{K}}_{\langle a} - D_a \left(\hat{K} - \frac{2}{3} \hat{\Theta} \right) - D^b \hat{\sigma}_{ab} + \frac{4\Theta}{3} \hat{K}_a - \left(\hat{K} + \frac{\hat{\Theta}}{3} \right) A_a - \hat{\sigma}_{ab} A^b - \omega_{ab} \hat{K}^b + \sigma_{ab} \hat{K}^b + \tilde{\kappa}^2 \tilde{\pi}_a , \quad (\text{B.50})$$

$$0 = \dot{\mathcal{E}} - D^a \hat{\mathcal{E}}_a + \frac{4}{3} \Theta \mathcal{E} + \hat{\mathcal{E}}_{ab} \sigma^{ab} - 2\hat{\mathcal{E}}_a A^a + \hat{\sigma}^{ab} \dot{\hat{\sigma}}_{\langle ab} - \hat{\sigma}^{ab} D_a \hat{K}_b - \hat{K}^a D^b \hat{\sigma}_{ab} + \frac{2}{3} \hat{K}^a D_a \hat{\Theta} - 2A_b \hat{K}_a \hat{\sigma}^{ab} + \frac{\Theta}{3} \hat{\sigma}_{ab} \hat{\sigma}^{ab} + \left(\hat{K} + \frac{\hat{\Theta}}{3} \right) \sigma_{ab} \hat{\sigma}^{ab} + \sigma_{ca} \hat{\sigma}_b{}^c \hat{\sigma}^{ab} + \frac{2\Theta}{3} \hat{K}_a \hat{K}^a - \sigma_{ab} \hat{K}^a \hat{K}^b - \frac{\tilde{\kappa}^2}{2} (\tilde{\rho} - \tilde{\pi} + \tilde{p}) - \frac{2\tilde{\kappa}^2}{3} D^a \tilde{q}_a - \frac{2\tilde{\kappa}^2}{3} \Theta (\tilde{\rho} + \tilde{p}) - \frac{2\tilde{\kappa}^2}{3} \hat{\Theta} \tilde{q} - \frac{4\tilde{\kappa}^2}{3} \tilde{q}_a A^a - \frac{2\tilde{\kappa}^2}{3} \tilde{\pi}_{ab} \sigma^{ab} , \quad (\text{B.51})$$

$$0 = \dot{\hat{\mathcal{E}}}_{\langle k} + \frac{4}{3} \Theta \hat{\mathcal{E}}_k - \frac{1}{3} D_k \mathcal{E} - \frac{4\mathcal{E}}{3} A_k - D^a \hat{\mathcal{E}}_{ka} - \hat{\mathcal{E}}_{ka} A^a - (\omega_{ka} - \sigma_{ka}) \hat{\mathcal{E}}^a + \dot{\hat{\sigma}}_{\langle ka} \hat{K}^a + \hat{K}^a D_a \hat{K}_k - \left(\hat{K} + \frac{\hat{\Theta}}{3} \right) D^b \hat{\sigma}_{kb} + \hat{K}^a \sigma_{ck} \hat{\sigma}_a{}^c + \frac{2}{3} \left(\hat{K} + \frac{\hat{\Theta}}{3} \right) D_k \hat{\Theta} + \frac{2\Theta}{3} \left(\hat{K} + \frac{\hat{\Theta}}{3} \right) \hat{K}_k - 2\hat{K}^a D_k \hat{K}_a + \frac{\hat{K}_k}{3} D^a \hat{K}_a - 2\hat{K}^a A_{\langle k} \hat{K}_{a\rangle} - \sigma_{ba} \hat{\sigma}_k{}^b \hat{K}^a + \frac{2\hat{K}_k}{3} \sigma_{ab} \hat{\sigma}^{ab} + \hat{\sigma}^{ab} D_k \hat{\sigma}_{ab} - \hat{\sigma}_b{}^a D^b \hat{\sigma}_{ka} - \frac{\hat{\sigma}_k{}^a}{3} D_a \hat{\Theta} + \varepsilon_{cab} \hat{K}^a \omega^b \hat{\sigma}_k{}^c + \varepsilon_k{}^{ab} \hat{K}_c \omega_a \hat{\sigma}_b{}^c - \frac{2\tilde{\kappa}^2}{3} \tilde{\pi}'_{\langle k} + \frac{\tilde{\kappa}^2}{6} D_k (\tilde{\rho} + 3\tilde{\pi} - 3\tilde{p}) + \frac{2\tilde{\kappa}^2}{3} \left(\hat{K} - \frac{\hat{\Theta}}{3} \right) \tilde{\pi}_k - \frac{2\tilde{\kappa}^2}{3} K \tilde{q}_k - \frac{2\tilde{\kappa}^2}{3} \tilde{q} (2\hat{K}_k + K_k) + \frac{2\tilde{\kappa}^2}{3} \tilde{\pi}_{ka} \hat{A}^a - \frac{2\tilde{\kappa}^2}{3} (\tilde{\pi} - \tilde{p}) \hat{A}_k - \frac{5\tilde{\kappa}^2}{3} \hat{\sigma}_{ka} \tilde{\pi}^a , \quad (\text{B.52})$$

$$0 = \dot{\Theta} - D^a A_a + \frac{\Theta^2}{3} + \hat{\Theta} \hat{K} - A^a A_a - 2\omega_a \omega^a + \sigma_{ab} \sigma^{ab} - \hat{K}^a \hat{K}_a - \mathcal{E} - \frac{\tilde{\Lambda}}{2} + \frac{\tilde{\kappa}^2}{2} (\tilde{\rho} + \tilde{\pi} + \tilde{p}) , \quad (\text{B.53})$$

$$0 = \dot{\omega}_{\langle a} - \frac{1}{2} \varepsilon_a{}^{cd} D_c A_d + \frac{2\Theta}{3} \omega_a - \sigma_{ab} \omega^b , \quad (\text{B.54})$$

$$0 = \dot{\sigma}_{\langle ab} - D_{\langle a} A_{b\rangle} + \frac{2\Theta}{3} \sigma_{ab} + \frac{1}{2} \left(\hat{K} - \frac{\hat{\Theta}}{3} \right) \hat{\sigma}_{ab} - A_{\langle a} A_{b\rangle} - \frac{1}{2} \hat{K}_{\langle a} \hat{K}_{b\rangle} + \omega_{\langle a} \omega_{b\rangle} + \sigma_{c\langle a} \sigma_{b\rangle}{}^c + \frac{1}{2} \hat{\sigma}_{c\langle a} \hat{\sigma}_{b\rangle}{}^c + E_{ab} + \frac{1}{2} \hat{\mathcal{E}}_{ab} - \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} \tilde{\pi}_{ab} , \quad (\text{B.55})$$

$$0 = D^a \omega_a - A_a \omega^a, \quad (\text{B.56})$$

$$0 = D_{\langle c} \omega_{k \rangle} + \varepsilon_{ab \langle k} D^b \sigma_{c \rangle}^a + 2A_{\langle c} \omega_{k \rangle} + H_{ab}, \quad (\text{B.57})$$

$$0 = D^b \sigma_{ab} - \frac{2}{3} D_a \Theta + \varepsilon_a{}^{ck} D_c \omega_k - \frac{2\hat{\Theta}}{3} \hat{K}_a + 2\varepsilon_a{}^{ck} A_c \omega_k + \hat{\sigma}_{ab} \hat{K}^b + \hat{\mathcal{E}}_a + \frac{2\tilde{\kappa}^2}{3} \tilde{q}_a, \quad (\text{B.58})$$

$$\begin{aligned} 0 = & \dot{E}_{\langle kj \rangle} - \frac{1}{2} \dot{\hat{\mathcal{E}}}_{\langle kj \rangle} - \varepsilon_{ab \langle k} D^a H_{j \rangle}^b + \frac{1}{2} D_{\langle k} \hat{\mathcal{E}}_{j \rangle} + \Theta E_{kj} - \frac{\Theta}{6} \hat{\mathcal{E}}_{kj} + \hat{\mathcal{E}}_{\langle k} A_{j \rangle} - \frac{2\mathcal{E}}{3} \sigma_{kj} \\ & - \frac{1}{2} \hat{\mathcal{E}}_{\langle j}^a (\omega_{k \rangle a} + \sigma_{k \rangle a}) + E_{\langle k}^a (\omega_{j \rangle a} - 3\sigma_{j \rangle a}) + 2\varepsilon_{\langle k}{}^{ab} H_{j \rangle a} A_b - \frac{1}{2} \left(\hat{K} - \frac{\hat{\Theta}}{3} \right) \dot{\hat{\sigma}}_{\langle kj \rangle} \\ & - \hat{\sigma}_{\langle j}^a \dot{\hat{\sigma}}_{k \rangle a} - \frac{1}{2} \left(\hat{K} - \frac{\hat{\Theta}}{3} \right) \hat{\sigma}_{kj} + \hat{K}_{\langle k} D_{j \rangle} \left(\hat{K} - \hat{\Theta} \right) - \frac{\hat{\Theta}}{3} D_{\langle k} \hat{K}_{j \rangle} + \frac{\hat{\sigma}_{\langle j}^a}{2} D_{k \rangle} \hat{K}_a + \hat{K}_{\langle k} D^b \hat{\sigma}_{j \rangle b} \\ & + \frac{1}{2} \hat{K}_a D_{\langle k} \hat{\sigma}_{j \rangle}^a + \frac{\hat{\Theta}}{3} \left(\hat{K} + \frac{\hat{\Theta}}{3} \right) \sigma_{kj} - \frac{7\Theta}{6} \hat{K}_{\langle k} \hat{K}_{j \rangle} + \left(\hat{K} - \frac{\hat{\Theta}}{3} \right) \hat{K}_{\langle k} A_{j \rangle} - \frac{\Theta}{6} \hat{\sigma}_{\langle j}^a \hat{\sigma}_{k \rangle a} \\ & - \frac{1}{2} \left(\hat{K} - \frac{\hat{\Theta}}{3} \right) \hat{\sigma}_{\langle k}^a (\omega_{j \rangle a} + \sigma_{j \rangle a}) - \frac{\Theta}{6} \left(\hat{K} - \frac{\hat{\Theta}}{3} \right) \hat{\sigma}_{kj} - \frac{1}{2} \hat{K}_{\langle k} \sigma_{j \rangle b} \hat{K}^b - \frac{1}{2} \hat{\sigma}_{\langle j}^a \omega_{k \rangle c} \hat{\sigma}_a{}^c \\ & - \frac{1}{2} \sigma_{jk} \hat{K}^a \hat{K}_a + \frac{3}{2} \hat{K}_{\langle k} \omega_{j \rangle a} \hat{K}^a + \hat{K}_{\langle k} \hat{\sigma}_{j \rangle a} A^a + \hat{\sigma}_{a \langle j} A_{k \rangle} \hat{K}^a - \frac{1}{2} \hat{\sigma}_c{}^a \hat{\sigma}_{\langle k}^c \sigma_{j \rangle a} - \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} \dot{\tilde{\pi}}_{\langle kj \rangle} \\ & - \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} D_{\langle k} \tilde{q}_{j \rangle} + \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} \tilde{\pi}_{\langle k} \hat{K}_{j \rangle} - \frac{4\tilde{\kappa}^2}{3} \tilde{q}_{\langle k} A_{j \rangle} - \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} (\tilde{\rho} + \tilde{p}) \sigma_{jk} - \frac{\tilde{\kappa}^2}{9} \Theta \tilde{\pi}_{jk} - \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} \tilde{\pi}_{\langle j}^a (\omega_{k \rangle a} + \sigma_{k \rangle a}), \quad (\text{B.59}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = & \dot{H}_{\langle kj \rangle} + \varepsilon_{ab \langle k} D^a E_{j \rangle}^b + \frac{1}{2} \varepsilon_{ab \langle k} D^a \hat{\mathcal{E}}_{j \rangle}^b + \Theta H_{kj} - 3\sigma_{a \langle k} H_{j \rangle}^a - \omega_{a \langle k} H_{j \rangle}^a \\ & - 2\varepsilon_{\langle k}{}^{ab} E_{j \rangle a} A_b - \frac{1}{2} \varepsilon_{\langle k}{}^{ab} \sigma_{j \rangle a} \hat{\mathcal{E}}_b - \frac{3}{2} \hat{\mathcal{E}}_{\langle j} \omega_{k \rangle} - \frac{1}{2} \varepsilon_{\langle k}{}^{cd} \hat{\sigma}_{j \rangle c} D_d \left(\hat{K} - \frac{\hat{\Theta}}{3} \right) \\ & + \frac{1}{2} \left(\hat{K} - \frac{\hat{\Theta}}{3} \right) \varepsilon_{ab \langle k} D^a \hat{\sigma}_{j \rangle}^b + \frac{1}{2} \varepsilon_{ab \langle k} D^a \hat{\sigma}_{j \rangle c} \hat{\sigma}^{cb} + \frac{1}{2} \varepsilon_{ab \langle k} \hat{\sigma}_{j \rangle c} D^a \hat{\sigma}^{cb} \\ & + \hat{\Theta} \omega_{\langle k} \hat{K}_{j \rangle} + \frac{\hat{\Theta}}{3} \varepsilon_{\langle k}{}^{ab} \sigma_{j \rangle a} \hat{K}_b - \frac{1}{2} \varepsilon_{ab \langle k} \hat{K}_{j \rangle} D^a \hat{K}^b - \frac{1}{2} \varepsilon_{ab \langle k} \hat{K}^b D^a \hat{K}_{j \rangle} \\ & + \frac{\varepsilon_{\langle k}{}^{ab}}{2} \sigma_{j \rangle b} \hat{\sigma}_a{}^c \hat{K}_c - \frac{3}{2} \hat{\sigma}_{\langle j}^a \omega_{k \rangle} \hat{K}_a - \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} \varepsilon_{ab \langle k} D^a \tilde{\pi}_{j \rangle}^b - \tilde{\kappa}^2 \tilde{q}_{\langle j} \omega_{k \rangle} - \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} \varepsilon_{\langle k}{}^{ab} \sigma_{j \rangle a} \tilde{q}_b, \quad (\text{B.60}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = & D^a E_{ak} - \frac{1}{2} D^a \hat{\mathcal{E}}_{ak} + \frac{1}{3} D_k \mathcal{E} - 3H_{ka} \omega^a + \varepsilon_k{}^{ab} H_{ac} \sigma_b^c + \frac{\Theta}{3} \hat{\mathcal{E}}_k - \frac{1}{2} (3\omega_{ka} + \sigma_{ka}) \hat{\mathcal{E}}^a - \frac{2\hat{\Theta}}{9} D_k \hat{\Theta} \\ & - \frac{1}{2} \hat{\sigma}_{ak} D^a \left(\hat{K} - \frac{\hat{\Theta}}{3} \right) - \frac{1}{2} \left(\hat{K} - \frac{\hat{\Theta}}{3} \right) D^a \hat{\sigma}_{ak} - \frac{1}{2} \hat{\sigma}_a{}^c D^a \hat{\sigma}_{ck} + \frac{2}{3} \hat{\sigma}^{ab} D_k \hat{\sigma}_{ab} - \frac{1}{2} \hat{\sigma}_{kb} D^a \hat{\sigma}_a{}^b \\ & - \frac{\hat{K}^a}{3} D_k \hat{K}_a + \frac{\hat{K}_a}{2} D^a \hat{K}_k + \frac{\hat{K}_k}{2} D^a \hat{K}_a + \frac{3\varepsilon_k{}^{ad}}{2} \hat{K}_c \omega_a \hat{\sigma}_d{}^c - \frac{\hat{\sigma}_a{}^b}{2} \hat{K}^a \sigma_{kb} - \frac{2\hat{\Theta}}{9} \Theta \hat{K}_k + \frac{\hat{\Theta}}{3} \sigma_{kb} \hat{K}^b \\ & + \hat{\Theta} \varepsilon_k{}^{cd} \hat{K}_c \omega_d + \frac{\Theta}{3} \hat{\sigma}_k{}^a \hat{K}_a + \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} D^a \tilde{\pi}_{ak} - \frac{\tilde{\kappa}^2}{6} D_k (\tilde{\rho} - \tilde{\pi} + \tilde{p}) + \frac{2\tilde{\kappa}^2}{9} \Theta \tilde{q}_k - \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} \tilde{q}^a (3\omega_{ka} + \sigma_{ka}), \quad (\text{B.61}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & D^a H_{ak} + \frac{1}{2} \varepsilon_k^{ab} D_a \hat{\mathcal{E}}_b - \frac{4\mathcal{E}}{3} \omega_k + 3E_{ka} \omega^a - \varepsilon_k^{ab} E_{ac} \sigma_b^c + \frac{1}{2} \hat{\mathcal{E}}_{ak} \omega^a + \frac{1}{2} \varepsilon_k^{ab} \hat{\mathcal{E}}_{ac} \sigma_b^c - \frac{1}{2} \hat{K}^c \omega_c \hat{K}_k \\
& - \frac{\varepsilon_k^{ab}}{3} \hat{K}_b D_a \hat{\Theta} - \frac{\hat{\Theta}}{3} \varepsilon_k^{ab} D_a \hat{K}_b - \frac{\varepsilon_{abk}}{2} \hat{K}^c D^b \hat{\sigma}_c^a - \frac{\varepsilon_k^{ab}}{2} \hat{\sigma}_a^c D_b \hat{K}_c + \frac{2\hat{\Theta}}{3} \left(\hat{K} + \frac{\hat{\Theta}}{3} \right) \omega_k - \frac{\hat{K}_a}{2} \hat{K}^a \omega_k \\
& + \frac{1}{2} \left(\hat{K} - \frac{\hat{\Theta}}{3} \right) \hat{\sigma}_k^c \omega_c + \frac{\varepsilon_k^{ac}}{2} \sigma_{ab} \hat{K}^b \hat{K}_c - \frac{\hat{\sigma}_{ab} \hat{\sigma}^{ab}}{2} \omega_k + \frac{\hat{\sigma}_{ca} \hat{\sigma}^c{}^a}{2} \omega_k + \frac{1}{2} \left(\hat{K} - \frac{\hat{\Theta}}{3} \right) \varepsilon_k^{ab} \hat{\sigma}_{ac} \sigma_b^c \\
& + \frac{1}{2} \varepsilon_k^{ab} \hat{\sigma}_{da} \hat{\sigma}_c^d \sigma_b^c - \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} \tilde{\pi}_{ka} \omega^a + \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} \varepsilon_k^{ab} D_a \tilde{q}_b + \frac{2\tilde{\kappa}^2}{3} (\tilde{\rho} + \tilde{p}) \omega_k - \frac{\tilde{\kappa}^2}{3} \varepsilon_k^{ab} \tilde{\pi}_a^c \sigma_{bc} . \quad (B.62)
\end{aligned}$$

B.4. Kinematikai, gravito-electro-mágneses és anyagi változók Bianchi I brán-világra

Ebben a mellékletben átirom a [169]-ben megadott Bianchi I brán-világ megoldást a 3+1+1 kovariáns formalizmus változóiba. Ez a brán-világ megoldás tartalmaz egy a tetszőleges $V(y)$ függvényt. Itt az y koordináta nem a brán normálisa menti integrálgörbe paramétere. A $V(y)$ függvényt a konkrét brán beágyazása rögzíti [169]. Az 5d megoldást [169] (10), (17)-(19) és (25) egyenletei adják, amíg a 3+1+1 felbontáshoz szükséges u és n duális vektorokat (37) és (40) egyenletek.

A kinematikai mennyiségeket az B.1. és B.2. táblázatok, amíg a gravito-elektro-mágneses mennyiségeket az B.3. és B.4. táblázatok tartalmazzák. Az B.2. és B.4. táblázatokban található mennyiségek az újak [169]-hez képest. A táblázatokban a vessző az y szerinti deriválást jelenti.

B.1. táblázat. Brán kinematikai mennyiségek (első oszlop) a [169]-ben megadott brán-világra (második oszlop: jelölések és egyenlet számok a [169] hivatkozásból származnak).

kinematikai mennyiség	[169] metrikájára
A_a	0
Θ	Θ , (63) egyenlet
σ_{ab}	σ_{AB} , (64)-(65) egyenletek
ω_a	0

B.2. táblázat. Nem brán kinematikai mennyiségek (első oszlop) [169]-ben megadott brán-világra (második oszlop: jelölések a [169] hivatkozásból származnak).

kinematikai mennyiség	[169] metrikájára
\hat{K}	$\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-V^2}} \left(\frac{u'}{4u} + \frac{C_0}{u} + \frac{VV'}{1-V^2} \right)$
K	$-\frac{1}{\sqrt{1-V^2}} \left(\frac{Vu'}{4u} + \frac{VC_0}{u} + \frac{V'}{1-V^2} \right)$
$\hat{\Theta}$	$\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-V^2}} \left(\frac{3u'}{4u} - \frac{C_0}{u} \right)$
\hat{A}_a	0
\hat{K}_a	0
\hat{K}_a	0
L_a	0
$\hat{\omega}_a$	0
$\hat{\sigma}_{ab}$	$\sum_{i=1}^3 \hat{\sigma}_i e_{ia} e_{ib}$, $\hat{\sigma}_i = \frac{\varepsilon}{3u\sqrt{1-V^2}} (C_0 + 3C_i)$

B.3. táblázat. Brán gravito-elektro-mágneses mennyiségek (első oszlop) [169]-ben megadott brán-világra (második oszlop: jelölések és egyenlet számok a [169] hivatkozásból származnak).

brán gravito-electro-mágneses mennyiségek	[169] metrikájára
\mathcal{E}	$-\kappa^2 \mathcal{U}$, (53) egyenlet
$\widehat{\mathcal{E}}_a$	0
$\widehat{\mathcal{E}}_{ab}$	$-\kappa^2 \mathcal{P}_{AB}$, (54)-(55) egyenletek

B.4. táblázat. Nem brán gravito-elektro-mágneses mennyiségek (első oszlop) [169]-ben megadott brán-világra (második oszlop: jelölések a [169] hivatkozásból származnak).

nem brán gravito-electro-mágneses mennyiségek	[169] metrikájára
\mathcal{E}_a	0
\mathcal{H}_a	0
\mathcal{E}_{ab}	$\sum_{i=1}^3 E_i e_{ia} e_{ib}$, $E_i = -\frac{1}{6u^2} [(C_0 + 3C_i) u' - \frac{3}{2}C - 2(C_0^2 + 3C_i^2)] + \frac{1}{4u^2(1-V^2)} [(C_0 + 3C_i) u' - C + 4C_i(C_0 - C_i)]$
\mathcal{F}_{ab}	$\sum_{i=1}^3 F_i e_{ia} e_{ib}$, $F_i = \frac{\varepsilon V}{(1-V^2)u^2} [\frac{C_0+3C_i}{4}u' + C_i(C_0 - C_i) - \frac{C}{4}]$
\mathcal{H}_{ab}	0
$\widehat{\mathcal{H}}_{ab}$	0

A brán anyagi változókat [169]-ben megadták. Bránon kívüli anyag nincs.

C. függelék

Általános relativisztikus analógia: a Bertotti-Robinson metrika, mint az extrémális Reissner-Nordström téridő horizont régiója

A Reissner-Nordström metrika az m tömegű és Q töltésű pont test, külső, gömbszimmetrikus, sztatikus, elektro-vákum téridejét írja le. A téridőben két esemény horizont van, amelyek a $Q = m$ extrémális esetben egybeesnek és helyzetüket $r = m$ adja. Extrémális esetben az ívelem négyzet:

$$ds_{RN}^2 = - \left(1 - \frac{m}{r}\right)^2 dt^2 + \left(1 - \frac{m}{r}\right)^{-2} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (\text{C.1})$$

ahol $d\Omega^2$ az egység sugarú 2-dimenziós (2d) gömb ívelem négyzete. Azért, hogy egy közelítő kifejezést kapjunk a metrikára a horizont közelében, bevezetjük a $\rho = r - m$ [225] koordinátát, így (C.1):

$$ds_{RN}^2 = - \left(\frac{\rho}{\rho + m}\right)^2 dt^2 + \left(\frac{\rho}{\rho + m}\right)^{-2} d\rho^2 + (\rho + m)^2 d\Omega^2. \quad (\text{C.2})$$

Közel a horizonthoz ($\rho \approx 0$) az extrémális Reissner-Nordström téridő közelítő kifejezése:

$$ds_{hRN}^2 = - \left(\frac{\rho}{m}\right)^2 dt^2 + \left(\frac{\rho}{m}\right)^{-2} d\rho^2 + m^2 d\Omega^2. \quad (\text{C.3})$$

Alkalmazva az *i.*) $t' = it$; *ii.*) $\rho = m \exp(-\tau') \cosh z$, $t' = m \exp(\tau') \tanh z$; *iii.*) $\tau = i\tau'$ koordináta transzformációkat kapható [225]:

$$ds_{hRN}^2 = m^2 [-\cosh^2 z d\tau^2 + dz^2 + d\Omega^2]. \quad (\text{C.4})$$

A koordináta transzformáció sorozat szintén írható, mint

$$\begin{aligned} \rho &= m \exp(i\tau) \cosh z, \\ t &= -im \exp(-i\tau) \tanh z, \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

aminek inverze:

$$z = \operatorname{arcsinh} \frac{i\rho t}{m^2}, \quad 2i\tau = \ln \frac{m^2 \rho^2}{m^4 - t^2 \rho^2}. \quad (\text{C.6})$$

Az extrémális Reissner-Nordström téridő energia-impulzus tenzora (t, r, θ, φ) koordinátákban:

$$T_b^a = \frac{m^2}{r^4} \operatorname{diag}(-1, -1, 1, 1). \quad (\text{C.7})$$

Bevezetve a $\rho = r - m$ koordinátát $\rho \approx 0$ -ra kapható:

$$T_b^a = \frac{1}{m^2} \text{diag}(-1, -1, 1, 1) . \quad (\text{C.8})$$

A (C.3) közelítő horizont metrika egzakt megoldása az 5d Einstein egyenletnek a (C.8) energia-impulzus tenzorral. Továbbá alkalmazva a (C.5) komplex koordináta transzformációt a (C.8) energia-impulzus tenzor nem változik.

Ez az energia-impulzus tenzor egy tiszta elektromos mezőt ír le. Reissner-Nordström téridőben (t, r, θ, φ) koordinátákban a térerősség tenzor nem eltűnő komponensei

$$F_{tr} = -F_{rt} = -\frac{Q}{r^2} . \quad (\text{C.9})$$

A $Q = m$ extrémális esetben az $r = m$ degenerált horizonton pedig:

$$F_{tr} = -F_{rt} = -\frac{1}{m} . \quad (\text{C.10})$$

A Bertotti-Robinson téridő [226], [227] kozmológiai állandó jelenlétében, kovariánsan konstans elektromágneses mező generálta konstans r_+ és r_- görbületi sugarú 2d Riemann felületek szorzata. Az ívelem négyzet általános formája:

$$ds_{BR}^2 = -\left(1 + \frac{x^2}{r_+^2}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{x^2}{r_+^2}\right)^{-1} dx^2 + r_-^2 d\Omega^2 . \quad (\text{C.11})$$

Alkalmazva a következő koordináta transzformációt:

$$\text{arcsinh} \frac{x}{r_+} = z , \quad t = r_+ \tau \quad (\text{C.12})$$

amelyik adja, hogy $1 + x^2/r_+^2 = \cosh^2 z$, a Bertotti-Robinson metrika:

$$ds_{BR}^2 = r_+^2 [-\cosh^2 z d\tau^2 + dz^2] + r_-^2 d\Omega^2 , \quad (\text{C.13})$$

amelyik (C.4)-et adja, ha a két Riemann felület görbületi sugarai megegyeznek:

$$r_+ = r_- = m . \quad (\text{C.14})$$

A görbületi sugarak egyenlősége egyenértékű a kozmológiai állandó eltűnésével, így ekkor a téridőt tiszta elektromágneses mező generálja.

A Bertotti-Robinson téridőben a térerősség tenzort [226] (17) egyenlete adja, amely párhuzamos elektromos és mágneses mezőt ír le. A $(\tau, z, \theta, \varphi)$ koordinátákban az energia-impulzus tenzor

$$T_b^a = \mu \text{diag}(-1, -1, 1, 1) . \quad (\text{C.15})$$

Itt $\mu = 1/m^2$ [lásd (C.8)] kapcsolatban áll az elektromágneses mező két invariánsával

$$\mu^2 = (\mathbf{h}^2 - \mathbf{e}^2)^2 + (2\mathbf{e}\mathbf{h})^2 . \quad (\text{C.16})$$

Az energia-impulzus tenzor csak μ -tól függ, amit a geometria meghatároz. Ezért a másik kulcs információ az elektromágneses mezőről, amit

$$\alpha = -\frac{1}{2} \arctan \frac{2\mathbf{e}\mathbf{h}}{\mathbf{h}^2 - \mathbf{e}^2} \quad (\text{C.17})$$

paraméter ad, megmarad határozatlannak. Az α megfelelő megválasztásával az elektromágneses mező tisztán elektromos mező lesz és $\mathbf{e}^2 = 1/m^2$, egyezésben (C.10) forrásával.

D. függelék

Az általánosított RS2 brán modellek szupernóva adatokkal való tesztje Weyl folyadék jelenlétében

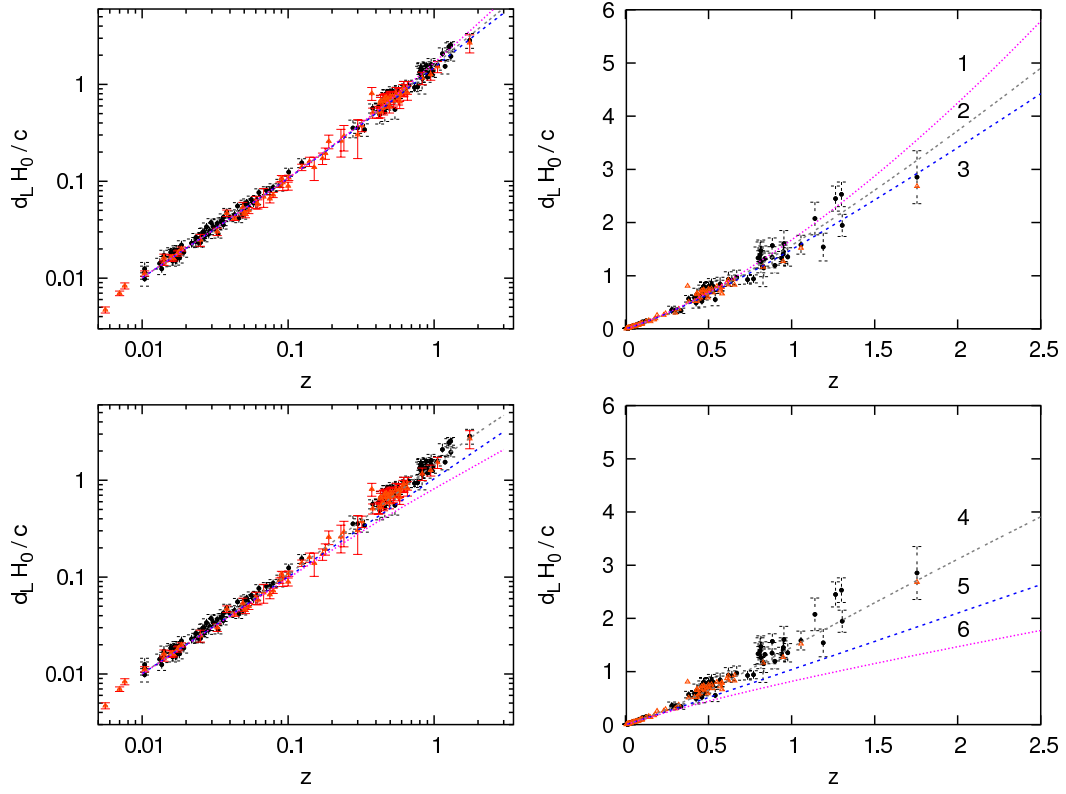
D.1. A modellek szelektált szupernóva adatokkal való összevetése

2003-ban 230 Ia típusú szupernóvára publikáltak d_L - z adat párokat [228], közülük 60 rendelkezett alacsony abszorpcióval ($A_V.1$) és $z > 0.01$ vöröseltolódással. Azért, hogy könnyen összehasonlítható eredményt kapjunk a korábbi munkákkal, itt szintén ezeket a szelektált alacsony abszorpciós adathalmazt használjuk a vizsgálatok nagyobb részében. Az alap szupernóva adathalmazt még amit itt használunk 2006-ban publikálták [229].

Összehasonlítjuk a szupernóva megfigyeléseket néhány a 2.5.1. alfejezetben tárgyalt modellel. Az D.1. ábra mutatja logaritmikus és lineáris skálákon a luminozítás távolság-vöröseltolódás relációkat $z = 2.5$ -ig. Az ábrák $k = 0$ és $\Omega_\rho = 0.27$ értéke mellett készültek (az SDSS és a WMAP 1-éves adatai kombinált analízise eredményének megfelelően [230]). Részletesebben, a luminozítás távolság-vöröseltolódás relációt mutatjuk az ábrán a következő modellekre:

- Az LWRS modell $\Omega_\lambda = \alpha = 0$ -ra (a perturbatív megoldást a luminozítás távolságra a (2.291), (2.295)-(2.296), (2.297), (2.299) és (2.301) egyenletek szolgáltatják), az $\Omega_d = -0.05$ (1 görbe) és $\Omega_d = 0.05$ (3 görbe) értékre. $\Omega_d > 0$ -ra a modellben a bránnak energiát kell sugároznia a korai időszakban és a struktúraképződéskor ahhoz, hogy az univerzum ismert történetével összhangba kerüljön (D.3. alfejezet). Így folytonosan növekvő fekete lyuk(ak) képződik (képződnek) a magasabb dimenziós téridőben. Amint ez a sugárzás eltűnik az 5d téridő Weyl görbülete egy késői sötét sugárzásként hat a bránon.
- A Λ CDM modell, a luminozítás távolságot (2.295)-(2.296) egyenletek adják (2 görbe).
- Sötét sugárzás mentes és $\lambda = 2\Lambda/\kappa^2$ brán-feszültségű modell [(2.287) egyenlet adja az analitikus kifejezését a luminozítás távolságnak], ahol a két lehetséges értékét a brán kozmológiai állandónak az $\Omega_\Lambda = 0.704$ (4 görbe) és $\Omega_\Lambda = 0.026$ (6 görbe) adja. Az $\Omega_\Lambda = 0.704$ esetén a modell hasonló azokhoz, melyeket [208]-ban tanulmányoztak.
- Az RS2 modell késői univerzum $\Omega_\lambda = 0$ határesetére Randall-Sundrum finom hangolással ($\Omega_\Lambda = 0$), amely a sötét sugárzás hatalmas hányadát tartalmazza $\Omega_d = 0.73$ ((2.282) egyenlet) (5 görbe).

Az D.1. ábrán az említett modelleket kirajzoltuk összehasonlítva az alacsony abszorpciós szupernóva adatokkal [228] (vörös háromszögek) és a Gold adatokkal [18] (fekete pontok). A mérési hibák a megfelelő színekkel vannak jelölve. A lineáris skálán készült diagrammok



D.1. ábra. Luminozitás távolság-vöröseltolódás reláció összehasonlítása a szupernóva adatokkal szelektált brán-világ kozmológiák és Λ CDM esetén. Az ábrázolás a baloldalon logaritmikus, míg a jobboldalon lineáris. A szelektált alacsony abszorpciós szupernóva adatokat [228] vörös szín jelzi, amíg a fekete pontok a Gold [18] adathalmazt jelölik. Logaritmikus skála esetén mindkét halmazra feltüntettük a mérési hibákat, amiket az áttekinthetőség érdekében a lineáris skálájú ábrákon elhagytunk. Az ábrázolt modellek a Λ CDM (2); brán modellek kozmológiai konstanssal és sötét sugárzási taggal (1 és 3); kozmológiai konstans nélkül, de sötét sugárzási jelenlétében (5); és kozmológiai konstanssal, ahol $\Lambda = \kappa^2 \lambda / 2$, emiatt a bránfeszültség alacsony (4, 6) és nincs sötét sugárzás. (Az ábráért köszönet Szabó Gyulának).

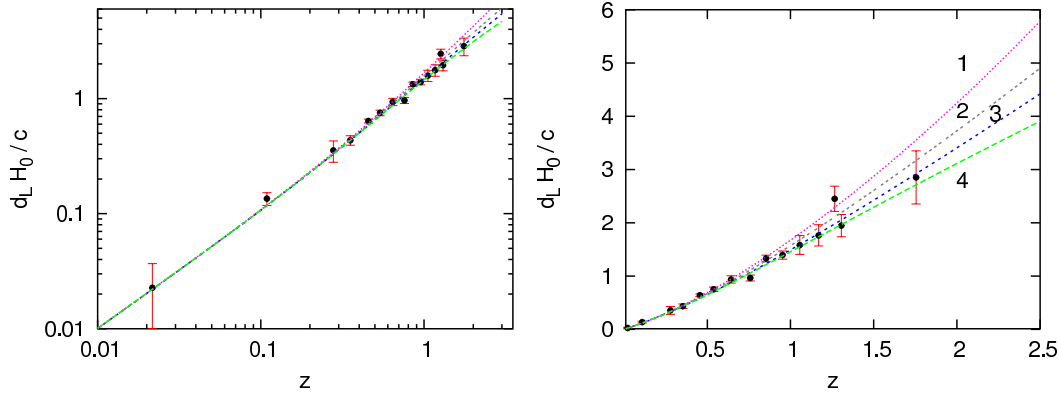
jobban kiemelik a modellek közötti különbségeket és azt, hogy azok mennyire illeszkednek a megfigyelésekhez.

Az 1, 3 és 4 görbe ábrázolta modellek szemre ugyanolyan jól illeszkednek a megfigyelésekhez, mint a Λ CDM (2 görbe). Ezzel szemben az 5 és 6 görbék jelentette modelleket a megfigyelések nem támasztják alá. A modell, amelyben nincs brán kozmológiai állandó, de jelentős sötét sugárzás van $\Omega_d = 0.73$, $\Omega_\lambda = 0$ (6 görbe), illetve a modell, amelyben a brán kozmológiai állandó és a brán-feszültség kapcsolata: $\Lambda = \kappa^2 \lambda / 2$, $\Omega_\Lambda = 0.025$ (5 görbe) jelentősen inkonzisztensek a megfigyelésekkel, mivel $\chi^2 = 213$, illetve 395^1 .

A talált $\chi^2 = 50$ érték a $\Lambda = \kappa^2 \lambda / 2$ -modell, melyben $\Omega_\Lambda = 0.704$ (4 görbe) csekély mértékben jobb, mint a Λ CDM. Azonban a pici $\lambda = 38.375 \times 10^{-60} \text{TeV}^4$ brán-feszültség érték, amely ehhez a modellhez tartozik sokkal alacsonyabb, mint a λ minimum értékére vonatkozó ismert korlátok (lásd 2.6. alfejezet).

A legjobb illeszkedést azon brán kozmológiai állandót tartalmazó modellre találunk, amelyben a brán-feszültség magas (ez vezet az $\Omega_\lambda \approx 0$ -ra) és amelyben a sötét sugárzásnak kis járuléka jelenik meg $\Omega_d = \pm 0.05$ (1 és 3 görbe). Az $\Omega_d = -0.05$ -re a $\chi^2 = 65$ értéket találjuk, amelyik még elfogadható. Az $\Omega_d = 0.05$ esetében $\chi^2 = 49$.

¹A Randall-Sundrum finomhangolt brán modellek az Ω_d és Ω_λ más értékeire is rossz egyezést mutattak a szupernóva adatokkal. A χ^2 -et (3.10) egyenlet definiálja.



D.2. ábra. A luminozitás távolság-vöröseltolódás reláció összehasonlítása a Gold adathalmazzal [18] az életképes brán-világ és a Λ CDM modellek esetén [(1)-(4) görbe az D.1. ábrán] mind logaritmikus (baloldal) és lineáris skálán. (jobboldal). A legjobb illeszkedés az 5% sötét sugárzást tartalmazó (3) brán világ mutatja. (Az ábráért köszönet Szabó Gyulának).

D.2. A Gold2006 szupernóva adatok

Riess és társai [229]-ben publikálták a 182 szupernóvából álló új adat halmazt, amely magában foglalja a Hubble űr teleszkóppal (HST) történt új megfigyeléseket és a korábbi mérések újra kalibrálását. Érdekes kérdés, hogy az újra kalibrálás, hogyan hat az előző alfejezetben a jól illeszkedő sötét sugárzást tartalmazó modellekre levont következtetésekre.

Feltesszük $\Omega_\rho = 0.27$, ahogy korábban. Ebben az esetben a χ^2 kritikus értéke 80% és 90% konfidencia szint esetén 197, illetve 209. Az D.2. ábrán látható 1-4 görbék reprezentálta modellek a következőképpen viselkednek. Az LWRS modell $\Omega_d = -0.05$ esetén 80% konfidencia szinten kívül esik ($\chi^2 = 204$). A $\lambda = 2\Lambda/\kappa^2$ és $\Omega_\Lambda = 0.704$ paraméterekkel rendelkező modellek a 90% konfidencia szinten is kívül esnek ($\chi^2 = 221$). Amint azt a korábbi analízisből vártuk, a Λ CDM modell ($\chi^2 = 192$) és az $\Omega_d = 0.05$ paraméterű LWRS modell ($\chi^2 = 194$) jól illeszkedik a megfigyelésekkel. Megjegyezzük, hogy Ω_d -t a -0.03 és 0.07 között változtatva az LWRS modell a 80% konfidencia szinten belül van.

Az LWRS modell illeszkedését a Gold2006 adathalmazhoz a D.3a ábra mutatja az $\Omega_d - \Omega_\rho$ síkon. A χ^2 globális minimuma ($\chi^2 = 190.52$) az $\Omega_d = 0.040$, $\Omega_\rho = 0.225$ paraméter párosnál található. Így sötét sugárzás jelenlétében kevesebb sötét anyag szükséges a szupernóva megfigyelések alapján, mint Λ CDM esetén ($\Omega_d = 0$), amely a legjobb illeszkedést az $\Omega_\rho = 0.275$ esetén mutatja, ahol a χ^2 -nek lokális minimuma található ($\chi^2 = 195.8$). Ez a lokális minimum azonban kívül esik az 1σ konfidencia intervallumon. Az LWRS modell tesztjét az $\Omega_\Lambda - \Omega_\rho$ síkon az D.3b ábrán mutatjuk. A globális minimum az $\Omega_\Lambda = 0.735$, $\Omega_\rho = 0.225$ paraméter értékeknél van, amíg a Λ CDM modell lokális minimuma az $\Omega_\Lambda = 0.725$ -re található.

Az ábrákon van egy fehérrel jelölt tilos tartomány amiatt, hogy a Friedmann egyenlet az LWRS modellre

$$\left[\frac{H(z)}{H_0} \right]^2 = \Omega_\Lambda + \Omega_\rho (1+z)^3 + \Omega_d (1+z)^4 > 0, \quad (\text{D.1})$$

amit kombinálva $\Omega_\Lambda + \Omega_\rho + \Omega_d = 1$ -el, a következő kényszert kapjuk

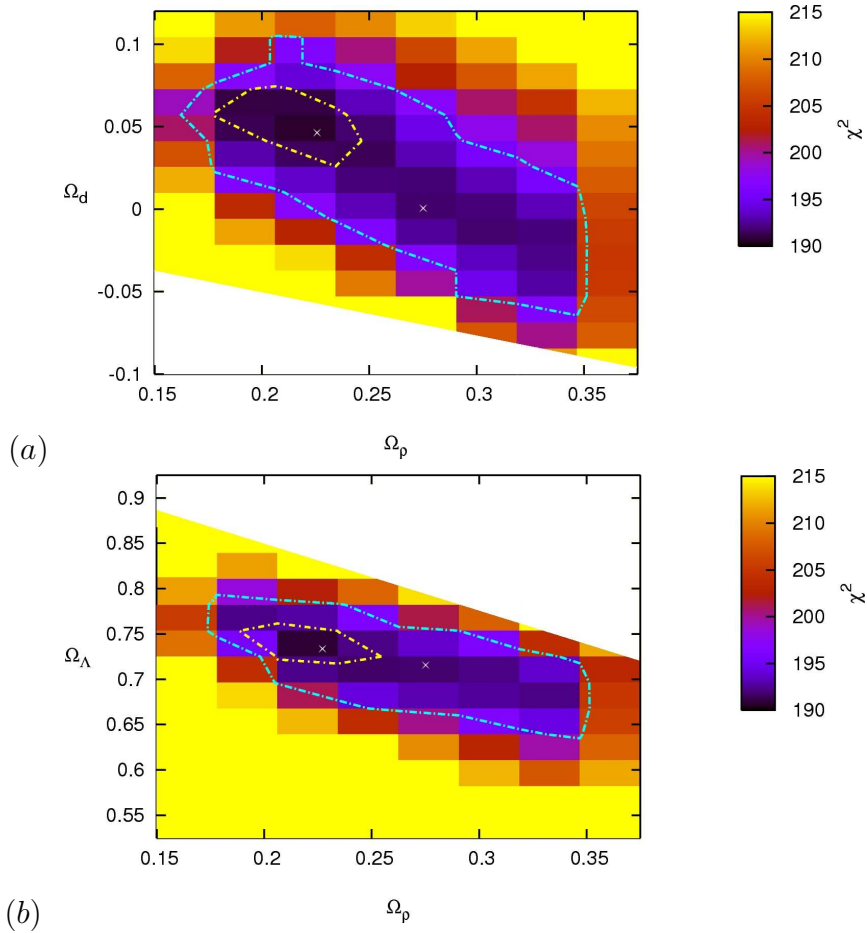
$$\Omega_d [(1+z)^4 - 1] + \Omega_\rho [(1+z)^3 - 1] + 1 > 0 \quad (\text{D.2})$$

az $\Omega_d - \Omega_\rho$ síkon és

$$\Omega_\Lambda [(1+z)^4 - 1] - (1+z)^3 [1 + z(1 - \Omega_\rho)] < 0 \quad (\text{D.3})$$

az $\Omega_\Lambda - \Omega_\rho$ síkon.

A tilos tartomány mindkét esetben z -vel nő. Ha ki akarjuk terjeszteni a modellt a $z \rightarrow \infty$, a



D.3. ábra. A luminositás-vöröseltolódás reláció a sötét sugárzást tartalmazó brán-világ modellekre (amely magában foglalja a Λ CDM modellt az $\Omega_d = 0$ -ra) az $\Omega_d - \Omega_\rho$ síkon [(a) ábra] és az $\Omega_\Lambda - \Omega_\rho$ síkon [(b) ábra]. (a) ábra: A szupernóva adatok az $\Omega_\rho = 0.225$, $\Omega_d = 0.040$ preferált értéket határozzák meg. A kontúrok az 1σ , és 2σ konfidencia szinteknek felelnek meg. A χ^2 globális, illetve lokális minimumát jelöltük az ábrán. A lokális minimum a Λ CDM modell legjobb illeszkedésnek felel meg ($\Omega_\rho = 0.275$, $\Omega_d = 0$). A fehér régió feltéve a modell érvényességét $z = 3$ -ig a szövegben elmagyarázott tilos tartományt mutatja. (b) ábra: A χ^2 globális minimuma $\Omega_\Lambda = 0.735$, $\Omega_\rho = 0.225$ -nál van, és van egy lokális minimuma, amely a Λ CDM modell legjobb illeszkedésének felel meg ($\Omega_\Lambda = 0.725$, $\Omega_\rho = 0.275$). (Az ábráért köszönet Szabó Gyulának).

határ görbe a $\lim_{z \rightarrow \infty} \Omega_d^{\min}(z, \Omega_\rho) = 0$ az $\Omega_d - \Omega_\rho$ síkon és $\lim_{z \rightarrow \infty} \Omega_\Lambda^{\max}(z, \Omega_\rho) = 1 - \Omega_\rho$ az $\Omega_\Lambda - \Omega_\rho$ síkon. Azonban az LWRS modell csak alacsony z -kre érvényes, és a tilos tartományt a $z = 3$ -ra ábrázoltuk.

D.3. Az LWRS modell kompatibilitása $\Omega_d = 0.04$ és $\alpha = 0$ paraméterekre a kozmológiai evolúcióval

A sötét sugárzás energiasűrűsége túl gyorsan csökken a kozmológiai evolúció során ahhoz, hogy számottevő hányadot képezzen jelenleg. Ebben az alfejezetben ezt a problémát járjuk körül és megmutatjuk, hogy egy energia kicserélődés a brán és a magasabb dimenziós téridő tartományok között az univerzum korábbi fejlődési szakaszában ($z > 3$) képes a számottevő sötét energia hányadhoz vezetni.

A sötét sugárzás energiasűrűségére [203]-ban származtatott kényszer:

$$-0.41 \leq \frac{\rho_d(z_{BBN})}{\rho_\gamma(z_{BBN})} \leq 0.105, \quad (\text{D.4})$$

ahol $\rho_\gamma(z_{BBN}) = \beta T_{BBN}^4$ a foton háttér sugárzás energiasűrűsége a BBN kezdetén. A β együttható

$$\beta = \frac{\pi^2}{30} g_* \frac{k_B^4}{(\hbar c)^3} = 3.78 \times 10^{-16} g_* \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-4}, \quad (\text{D.5})$$

ahol g_* a hőmérséklet függő relativisztikus szabadsági fokok effektív száma [111], [231]. A BBN kezdetén $g_* = 10.75$ [232], ekkor $T_{BBN} = 1.16 \times 10^{10} \text{ K}$. Ennélfogva $\rho_\gamma(z_{BBN}) = 7.37 \times 10^{25} \text{ J m}^{-3}$, így a (D.4) kényszer

$$-3.02 \times 10^{25} \text{ Jm}^{-3} \leq \rho_d(z_{BBN}) \leq 7.74 \times 10^{24} \text{ Jm}^{-3}. \quad (\text{D.6})$$

Megjegyezzük, hogy a megengedett negatív tartomány $\rho_d(z_{BBN})$ -re nagyobb, mint a pozitív.

Jelenleg a háttér sugárzás hőmérséklete $T_0 = 2.725 \text{ K}$, amely a $g_* = 3.36$ értéket eredményezi [231], [232]. A háttér sugárzás jelenlegi energiasűrűsége:

$$\rho_\gamma(z=0) = 7.01 \times 10^{-14} \text{ Jm}^{-3}. \quad (\text{D.7})$$

Felhasználva, hogy $H_0 = 73_{-3}^{+3} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [211], a ρ és Ω kapcsolata (mind fotonra, illetve sötét sugárzásra):

$$\rho_{d,\gamma} = 9.00 \times 10^{-10} \Omega_{d,\gamma} \text{ Jm}^{-3}. \quad (\text{D.8})$$

Így Ω_γ jelenlegi értéke

$$\Omega_\gamma = 7.74 \times 10^{-5}, \quad (\text{D.9})$$

amely elhanyagolhatóan kicsi. Ha a Weyl forrás tag az egész kozmológiai evolúció során sugárzásként viselkedik Ω_d még kisebb lenne. A (D.6), és (D.8) egyenletekből következik, hogy

$$-1.02 \times 10^{-4} \leq \Omega_d \leq 2.62 \times 10^{-5}. \quad (\text{D.10})$$

Nagyságrendileg $|\Omega_d|$ kisebb, vagy megegyezik az Ω_γ -val.

Azonban, ha a brán sugárzik a struktúraképződés alatt, az m tömeg paraméter függvénye lesz a skála faktornak: $m \propto a^\alpha$, ahol $1 \leq \alpha \leq 4$ [207]. Ekkor az energiasűrűsége az $a^{4-\alpha}$ szerint skálázódik.

Tegyük fel, hogy a brán egyensúlyi konfigurációban van ($\alpha = 0$) a $0 \leq z \leq z_1$ tartományban. Egy korábbi időszakban $z_1 < z \leq z_*$ a brán sugárzik, így $\alpha \neq 0$, végezetül a BBN kezdete után $z_* < z \leq z_{BBN}$ újra egyenesúlyban ($\alpha = 0$). Itt $z_{BBN} = (T_{BBN}/T_0) - 1 = 4.26 \times 10^9$. Ebben az esetben

$$\begin{aligned} \rho_d(z_{BBN}) &= \rho_d \left(\frac{a_0}{a_1} \right)^4 \left(\frac{a_1}{a_*} \right)^{4-\alpha} \left(\frac{a_*}{a_{BBN}} \right)^4 \\ &= \rho_d \left(\frac{1+z_1}{1+z_*} \right)^\alpha (1+z_{BBN})^4. \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

Behelyettesítve ezt (D.6) egyenletbe, és alkalmazva (D.8)-et, kapjuk:

$$-1.02 \times 10^{-4} \leq \left(\frac{1+z_1}{1+z_*} \right)^\alpha \Omega_d \leq 2.62 \times 10^{-5}. \quad (\text{D.12})$$

Az $\alpha = 0$ speciális esetben visszanyerjük a korábbi (D.10) kényszert, míg $\alpha > 0$ -ra kapjuk:

$$z_* \geq (1+z_1) [\max(-0.98 \Omega_d, 3.82 \Omega_d)]^{1/\alpha} \times 10^{4/\alpha} - 1. \quad (\text{D.13})$$

Specifikáljuk ezt az eredményt az $\Omega_d = 0.04$ megfigyelésekhez legjobban illeszkedő paraméter értékre. Az α függvényében a következő numerikus relációk állíthatók fel a brán sugárzás

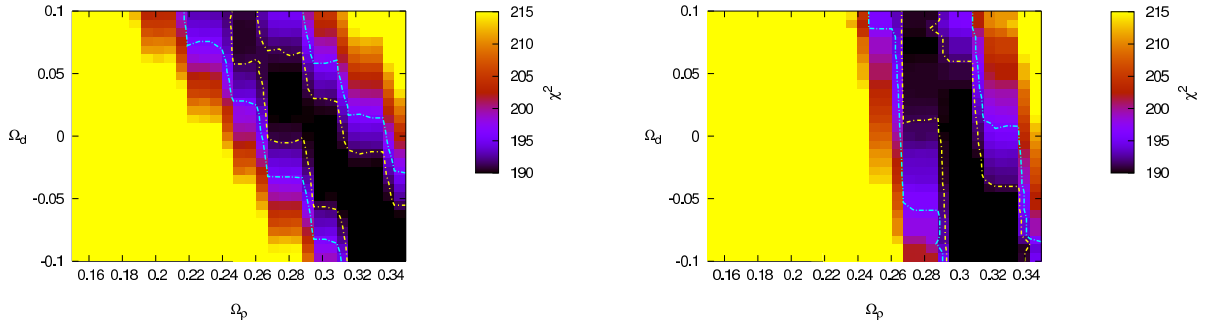
kezdeté és vége között:

$$z_* \geq \begin{cases} 1527.80 + 1528.80 z_1 & , \quad \alpha = 1 \\ 38.10 + 39.10 z_1 & , \quad \alpha = 2 \\ 10.52 + 11.52 z_1 & , \quad \alpha = 3 \\ 5.25 + 6.25 z_1 & , \quad \alpha = 4 \end{cases} . \quad (\text{D.14})$$

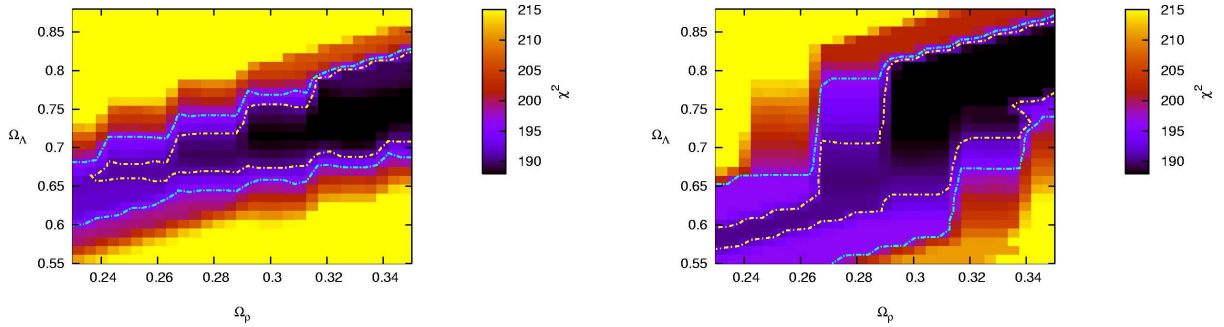
Evidens, hogy z_* nő z_1 -el, és csökken α -val. A legalacsonyabb határ az LWRS modellben $z_1 = 3$. Ekkor

$$z_* \geq \begin{cases} 6114.20 & , \quad \alpha = 1 \\ 155.40 & , \quad \alpha = 2 \\ 45.08 & , \quad \alpha = 3 \\ 24.01 & , \quad \alpha = 4 \end{cases} . \quad (\text{D.15})$$

Az α magas értékeire az Ω_d jelenlegi viszonylag nagy értékét okozható brán sugárzás időszaka viszonylag rövid.



D.4. ábra. Ugyanaz, mint D.3 ábrán, de $\alpha = 2$ (bal oldal) és $\alpha = 3$ (jobb oldal). Az ábrákat az Ω_d – Ω_ρ síkban készítettük. A χ^2 minimum helye egy elnyúlt tartományt képez, amely mutatja, hogy az adatokkal való kompatibilitás Ω_d értékére csak kissé érzékeny. (Az ábráért köszönet Szabó Gyulának).



D.5. ábra. Ugyanaz, mint D.4. ábrán, de Ω_Λ – Ω_ρ síkban. Az LWRS modell a Λ CDM modellhez képest az Ω_Λ alacsonyabb értékeire is jól illeszkedik, amely annak lehetőségét kínálja, hogy a sötét energia egy része sugárzó brán esetén kiváltható Weyl folyadékkal. (Az ábráért köszönet Szabó Gyulának).

D.4. Az LWRS modell összevetése a szupernóva adatokkal $\alpha = 2, 3$ esetén

Az α megváltozását okozó ismert mechanizmus hiánya miatt, megvizsgáljuk azokat az eseteket, amikor $\alpha = 2$ és 3 a teljes kozmológiai evolúció során. Azért, hogy a luminozitás távolságot megadó analitikus perturbatív megoldás érvényességét megőrizzük, az Ω_d paramétert a -0.1 – 0.1 intervallumra korlátozzuk, és feltesszük az univerzum térbeli síkságát.

Az LWRS modell szupernóva adatokkal való összevetése nagyjából ugyanazt eredményezi, mint $\alpha = 0$ esetben. A megjegyezhető különbség, hogy a χ^2 minimum értéke részsútosan elnyúlik az $\Omega_\rho - \Omega_d$ (lásd D.4. ábra), illetve az $\Omega_\rho - \Omega_\Lambda$ (lásd D.5. ábra) térben. Ezért irreleváns itt a megfigyelésekhez legjobban illeszkedő kozmológiai paraméterekről beszélni. Az $\alpha = 2$ és 3 esetén egy komplett modell család létezik, amely ugyanolyan jól meg tudja magyarázni a szupernóva adatokat. Az Ω_ρ -nak az Ω_d -tól való függése kisebb az $\alpha = 2$ és 3 esetekben, mint $\alpha = 0$ -ra. Az α növekedése esetén a minimum egyre meredekebb lesz egyre jobban korlátok közé szorítva Ω_ρ lehetséges értékeit, amíg Ω_d egyre nagyobb tartományt ölel át. Mivel az 1σ és 2σ kontúrok a $\alpha = 2, 3$ -ra kisebb Ω_Λ -t is megengednek, mint a Λ CDM-ben, ezért a Weyl folyadék a sötét energia egy részére nyújthat magyarázatot.